আদর্শ

জ্যামিতি, পরিমিতি ও ত্রিকোণমিতি

[দশম শ্রেণীর পাঠ্য]

কলিকাতা গভর্ণমেণ্ট মডেল স্কুলের ভূতপূর্ব হেডমাষ্টার, কলিকাতা নর্ম্যাল ট্রেণিং স্কুল, বারাকপুর গভর্ণমেণ্ট স্কুল, নবাব বাহাদুর ইন্‌ষ্টিটিউসন, কলিকাতা সংস্কৃত কলেজিয়েট স্কুল ও হিন্দু স্কুলের ভূতপূর্ব প্রধান গণিত শিক্ষক এবং আদর্শ পাটীগণিত ও বীজগণিত (৯ম ও ১০ম শ্রেণী), আদর্শ জ্যামিতি ও পরিমিতি (৯ম শ্রেণী), আদর্শ পাটীগণিত, জ্যামিতি ও বীজগণিত (৭ম ও ৮ম শ্রেণী), আদর্শ গণিত (৬ষ্ঠ শ্রেণী), আদর্শ জ্যামিতি (৬ষ্ঠ শ্রেণী), বুনিয়াদী আদর্শ গণিত (৫ম শ্রেণী) ইত্যাদির গ্রন্থকার

শ্রীমনোমোহন রায়চৌধুরী, এম. এ., বি. টি.

ও

অভিজ্ঞ শিক্ষক

শ্রীউপেন্দ্রনাথ রায়চৌধুরী, বি. এস-সি

প্রণীত

দি সেন্ট্রাল বুক এজেন্সী

১৪, বঙ্কিম চ্যাটার্জি ষ্ট্রীট : কলিকাতা-৭০০০১২

SYLLABUS IN MATHEMATICS

CLASS X

(*Revised*)

Geometry (30 marks)

1. Revision of previous work.

2. To prove :

(a) There is one circle and only one which passes through three given points not in a straight line.

(b) A straight line drawn from the centre of a circle to bisect a chord which is not a diameter is at right angles to the chord and conversely.

(c) The angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtends at any point on the remaining part of circumference.

(d) Angles in the same segment of a circle are congruent and if the line segment joining two points subtends congruent angles at two other points on same side of it, the four points lie on a circle.

(e) The angle in a semi-circle is a right angle.

(f) The opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are supplementary and the converse.

(g) (i) The tangent at any point of a circle and its radius th rough the point are perpendicular to one another.

(ii) The segment of two tangents of a circle from external point to the points of contact are congruent and they subtend congruent angles at the centre.

(iiii) If two circles touch, the point of contact lies on the straight line through the centres.

2. Simple idea of similarity transformations through activity—their properties.

3. To prove :

(i) If a straight line is drawn parallel to one side of a triangle the other two sides are divided proportionally and the converse.

(ii) If two triangles are equiangular, their corresponding sides are proportional and the converse.

(iii) If a perpendicular is drawn from the vertex of the right angle of a right-angled triangle to the hypotenuse, the triangles on each side of the perpendicular are similar to the whole triangle and to one another.

(iv) Pythagoras' theorem and its converse.

4. Constructions :

(i) To draw a circle about a triangle.

(ii) To draw a circle in a triangle.

(iii) To draw mean proportional.

Mensuration (10 marks)

1. Revision of previous work.

2. Surface and volume of Rectangular Parallelopiped, Cylinder and Sphere.

Trigonometry (15 marks)

1. Idea of trigonometrical angles.

2. Definition of trigonometrical ratios of an acute angle. Trigonometrical ratios of the standard angles—0°, 30°, 45°, 60°, 90° (undefined values such as tan 90°, cot 0° to be excluded).

3. Trigonometrical ratios of complementary angles.

4. Easy problems on heights and distances reducible to the solution of right-angled triangles involving the standard angles above.

আদর্শ জ্যামিতি

কতিপয় জ্যামিতিক সংজ্ঞা 1
ামান্তরিক বিষয়ক উপপাদ্য 1
মান্তরাল সরলরেখাঘটিত উপপাদ্য 6
ক্ষেত্রফল বিষয়ক উপপাদ্য 9
সমবিন্দু সরলরেখা বিষয়ক উপপাদ্য 12
বিবিধ অঙ্কন বিষয়ক সম্পাদ্য 13
ক্ষেত্রফল বিষয়ক বিবিধ প্রশ্ন 16
বৃত্ত 19
বৃত্ত অঙ্কন বিষয়ক উপপাদ্য (উপপাদ্য 20) 20
জ্যা বিষয়ক উপপাদ্য (স্বতঃসিদ্ধ 1, 2) 21
জ্যা বিষয়ক উপপাদ্য (উপপাদ্য 21, 22, 23) 22
বৃত্তাংশস্থ কোণ বিষয়ক উপপাদ্য (উপপাদ্য 24, 25, 26, 27) ... 29
ৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বিষয়ক উপপাদ্য (উপপাদ্য 28, 29) ... 37
ৃত্তাংশস্থ কোণ বিষয়ক বিবিধ প্রশ্ন 38
পর্শক 44
ছেদক ও স্পর্শকের পরস্পর সম্বন্ধ 44
অন্তঃস্পর্শ ও বহিঃস্পর্শ 44
স্পর্শক বিষয়ক উপপাদ্য (উপপাদ্য 30) 45
বহিঃস্থ বিন্দু হইতে বৃত্তের উপর স্পর্শক অঙ্কন বিষয়ক উপপাদ্য (উপপাদ্য 31, 32, 33) 47
প্রদত্ত বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু হইতে স্পর্শক অঙ্কন (সম্পাদ্য 9) ... 51
ৃত্ত বিষয়ক বিবিধ প্রশ্ন 52
ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য 54
অনুপাত ও সমানুপাত 56
সমানুপাত 57
সমতল ক্ষেত্রের সাদৃশ্য 58
দৃশ ক্ষেত্রের ধর্ম 59
ুপাত বিষয়ক উপপাদ্য (উপপাদ্য 34, 35) 60

সমানুপাত বিষয়ক উপপাদ্য (উপপাদ্য 36) ··· ··· 65
সদৃশ ক্ষেত্র বিষয়ক উপপাদ্য (উপপাদ্য 37, 38) ··· 66
পিথাগোরাসের উপপাদ্য (উপপাদ্য 39, 40) ··· 75
প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কন (সম্পাদ্য ·· 80
প্রদত্ত ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন (সম্পাদ্য 11) ··· ··· 81
প্রদত্ত ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন (সম্পাদ্য 12) ··· ·· 83
প্রদত্ত ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত অঙ্কন (সম্পাদ্য 13) ··· ··· 84
ত্রিভুজ ও বৃত্তবিষয়ক অনুশীলনী ··· ··· 85
প্রদত্ত তিনটি সরলরেখার চতুর্থ সমানুপাতী অঙ্কন (সম্পাদ্য 14) ··· 87
প্রদত্ত দুইটি সরলরেখার তৃতীয় সমানুপাতী অঙ্কন (সম্পাদ্য 15) ···
প্রদত্ত দুইটি সরলরেখার মধ্য-সমানুপাতী অঙ্কন (সম্পাদ্য 16) ···

আদর্শ পরিমিতি

বিষয় পৃষ্ঠা

বিষয়			পৃষ্ঠা
পুনরালোচনা : ক্ষেত্রফল	...	..	1
আয়তের ক্ষেত্রফল	...	...	1
আয়তের সীমাফল	...	..	1
আয়তের কর্ণ	...	...	1
বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল	...	...	2
বর্গক্ষেত্রের সীমাফল	.	...	2
বর্গক্ষেত্রের কর্ণ	...	...	2
দেওয়ালের ক্ষেত্রফল	...	...	3
দেওয়ালের সীমাফল	...	...	3
দেওয়ালের উচ্চতা	...	...	3
ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল	...	...	4
সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল	...	...	5
সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল	...	...	5
বৃত্তের পরিধি	...	...	7
বৃত্তের ব্যাস ও ব্যাসার্ধ	...	...	7
বৃত্তের ক্ষেত্রফল	...	...	9
গোলাকার বলয়ের ক্ষেত্রফল	...	...	9
ঘনবস্তুর ঘনফল	...	...	10
চৌপল	...	...	10
সমকোণী চৌপল বা আয়তিক ঘনবস্তু	...	...	11
সমকোণী চৌপলের এবং ঘনকের ঘনফল	...	...	11
সমকোণী চৌপল ও ঘনকের কর্ণ	...	...	11
স্তম্ভক বা চোঙ্গা	...	...	14
বৃত্তীয় স্তম্ভক বা বৃত্তীয় চোঙ্গা বা সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভক		...	14
স্তম্ভকের ও বৃত্তীয় স্তম্ভকের ঘনফল	...	...	15
গোলক বা বর্তুল	...	...	17
গোলকের কেন্দ্র, ব্যাসার্ধ ও ব্যাস	...	...	17
গোলকের ঘনফল	...	...	17
ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল	...	...	19
সমকোণী চৌপলের ও ঘনকের তলের ক্ষেত্রফল	...	...	19
স্তম্ভকের তলের ক্ষেত্রফল	...	...	21
গোলকের তলের ক্ষেত্রফল	...	...	23
উত্তরমালা : পরিমিতি	...	...	25

আদর্শ ত্রিকোণমিতি

ত্রিকোণমিতি কাহাকে বলে 1
জ্যামিতিক কোণ ও ত্রিকোণমিতিক কোণ 1
ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ 1
কোণ পরিমাপের ষষ্টিক প্রণালী 1
কোণ পরিমাপের শততমিক প্রণালী 2
ষষ্টিক ও শততমিক প্রণালীতে প্রদত্ত রাশির লঘূকরণ ... 2
ডিগ্রী ও গ্রেডের পারস্পরিক সম্বন্ধ 4
ষষ্টিক বা শততমিক প্রণালীর মিশ্র রাশিকে অপর প্রণালীতে পরিবর্তন 4
কোণ পরিমাপের বৃত্তীয় প্রণালী 6
বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত বিষয়ক উপপাদ্য ... 6
বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাতসূচক ধ্রুবক রাশি (π) ... 7
রেডিয়ান বিষয়ক উপপাদ্য 8
রেডিয়ানের মান 9
ডিগ্রী ও রেডিয়ানের পরস্পর সম্বন্ধ 9
ডিগ্রী, গ্রেড ও রেডিয়ানের পরস্পর সম্বন্ধ 9
ডিগ্রী বা গ্রেড বা রেডিয়ানের প্রণালী হইতে অন্য প্রণালীতে পরিবর্তন 9
চাপের সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণের রেডিয়ানসংখ্যা নির্ণয় ... 15
কোণানুপাত 19
কোণানুপাতসমূহের চিহ্ন 20
প্রদত্ত কোণের কোণানুপাতসমূহ ধ্রুবক 21
দুইটি পূরক কোণের কোণানুপাতসমূহের পরস্পর সম্বন্ধ ... 21
দুইটি সম্পূরক কোণের কোণানুপাতসমূহের পরস্পর সম্বন্ধ ... 22
কোণানুপাতসমূহের পরস্পর সম্বন্ধ 23
কোণানুপাতসমূহের মানের সীমা 28
30° কোণের কোণানুপাত 32
45°, 60° ও 90° কোণের কোণানুপাত 33
0° কোণের কোণানুপাত 34
0°, 30°, 45°, 60° এবং 90° পরিমিত কোণের কোণানুপাতসমূহের মানের তালিকা 35
অপনয়ন 36
সমীকরণ 38
অনুভূমিক রেখা ও উল্লম্ব রেখা 39
উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ 39
ত্রিকোণমিতির সাহায্যে দূরত্ব বা উচ্চতা বা ব্যবধান নির্ণয় ... 40
উত্তরমালা : ত্রিকোণমিতি 45

আদর্শ জ্যামিতি

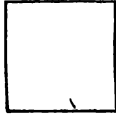
(পুনরালোচনা)

কতিপয় জ্যামিতিক সংজ্ঞা

1. যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল, তাহাকে **সামান্তরিক** (Parallelogram) বলে।

সামন্তরিক   আয়তক্ষেত্র

2. যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ, তাহাকে **আয়ত** বা **আয়তক্ষেত্র** (Rectangle) বলে।

3. যে আয়তের দুইটি সন্নিহিত বাহু সমান, তাহাকে **বর্গক্ষেত্র** (Square) বলে।

বর্গক্ষেত্র   রম্বস

4. যে চতুর্ভুজের সকল বাহু সমান কিন্তু একটি কোণও সমকোণ নহে, তাহাকে **রম্বস** (Rhombus) বলে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ উপরের চারিটি সংজ্ঞা হইতে দেখা যায়, কোন জ্যামিতিক সত্য প্রতিপন্ন করিতে হইলে (1) সামান্তরিকের বেলায় উহার বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল, (2) আয়তের বেলায় উহার বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল ও একটি কোণ সমকোণ, (3) বর্গক্ষেত্রের বেলায় উহার বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল, একটি কোণ সমকোণ ও দুইটি সন্নিহিত বাহু সমান এবং (4) রম্বসের বেলায় উহার সকল বাহু সমান কিন্তু একটি কোণও সমকোণ নহে শুধু এই সত্যগুলি বিনা প্রমাণে গ্রহণ করা চলিবে।

বিপরীতক্রমে, কোন সমতল ক্ষেত্র সামান্তরিক, আয়ত, বর্গক্ষেত্র বা রম্বস কিনা, তাহা প্রমাণ করিবার জন্য উহার সংজ্ঞায় প্রদত্ত সত্যগুলি প্রতিপন্ন করিতে হইবে।

5. যে চতুর্ভুজের দুই বাহু সমান্তরাল, তাহাকে **ট্রাপিজিয়ম** (Trapezium) বলে।

6. **সামান্তরিক বিষয়ক উপপাদ্য।**

উপপাদ্য 1. সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি সমান, বিপরীত কোণগুলি সমান এবং প্রত্যেক কর্ণ সামান্তরিককে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে। [প্রমাণ কর।]

উপপাদ্য 2. সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [প্রমাণ কর।]

উপপাদ্য 3. যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান, তাহা একটি সামান্তরিক। [প্রমাণ কর।]

অনুসিদ্ধান্ত 1. রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (S. F. '57)

ABCD রম্বসের কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ। রম্বসের চারি বাহু সমান বলিয়া, উহার বিপরীত বাহুগুলি সমান।

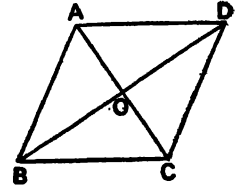
∴ ABCD রম্বসটি একটি সামান্তরিক (উপ. 3)

∴ OA = OC এবং OB = OD (উপ. 2)

∴ AOB ও AOD ত্রিভুজদ্বয়ের AB = AD, OB = OD এবং AO = AO ;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ; ∴ ∠AOB = ∠AOD ;

কিন্তু উহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকে সমকোণ ;

∴ AC ও BD পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অনুসিদ্ধান্ত 2. একটি রম্বসের ক্ষেত্রফল উহার কর্ণদ্বয় দ্বারা গঠিত আয়তের অর্ধেক। (S. F. 1972)

উপপাদ্য 4. যে চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি সমান, তাহা একটি সামান্তরিক। [প্রমাণ কর।]

উপপাদ্য 5. যে চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল, তাহা একটি সামান্তরিক। [প্রমাণ কর।]

অনুসিদ্ধান্ত। দুইটি সরলরেখা সমান ও সমান্তরাল হইলে, উহাদের একই পার্শ্বস্থ দুই প্রান্তবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা অপর দুই প্রান্তবিন্দু-সংযোজক সরলরেখার সমান ও সমান্তরাল হইবে।

AD ও BC সমান ও সমান্তরাল।

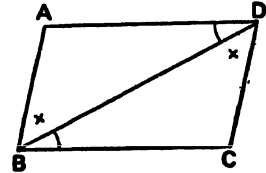
প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও DC সমান ও সমান্তরাল।

AB, CD ও BD যোগ কর।

প্রমাণ। ADB ও CBD ত্রিভুজদ্বয়ের AD = BC (কল্পনা), BD = BD

এবং ∠ADB = একান্তর ∠CBD ; ∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

∴ (1) AB = DC এবং (2) ∠ABD = ∠CDB কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ ;

∴ AB ∥ DC ; ∴ AB ও DC সমান ও সমান্তরাল।

উপপাদ্য 6. যে চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহা একটি সামান্তরিক। [প্রমাণ কর।]

অনুসিদ্ধান্ত 1. যে চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহা একটি রম্বস। (S. F. 1964)

উপপাদ্য 3 এর অনুসিদ্ধান্তের চিত্রে, △OAB ≡ △OBC ≡ △OCD ≡ △ODA ; কারণ, উহাদের যে কোনটির দুই বাহু ও অন্তর্ভূত কোণ অপর যে কোনটির দুই বাহু ও অন্তর্ভূত কোণের সমান।

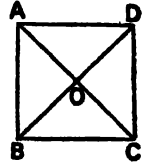
∴ AB = BC = CD = DA। ∴ চতুর্ভুজটি একটি রম্বস।

অনুসিদ্ধান্ত 2. যে চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় সমান এবং পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহা একটি বর্গক্ষেত্র। (S. F. 1963)

ABCD চতুর্ভুজের AC কর্ণ = BD কর্ণ এবং উহারা পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। এখন,

$\triangle OAB \equiv \triangle OBC \equiv \triangle OCD \equiv \triangle ODA$ এবং উহারা সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore$ চতুর্ভুজটির বাহুগুলি সমান এবং কোণগুলি সমকোণ ;

$\therefore$ চতুর্ভুজটি একটি বর্গক্ষেত্র।

অনুশীলনী 1

[নিম্নের প্রশ্নগুলির সমাধানের জন্য পৃষ্ঠা 1এ প্রদত্ত বিশেষ দ্রষ্টব্যটি ভালরূপে বুঝিয়া লইবে।]

1. সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হইলে উহার সকল কোণই সমকোণ হইবে ; অর্থাৎ আয়তের সকল কোণই সমকোণ। (C. U. 1927)

2. আয়তের দুইটি সন্নিহিত বাহু সমান হইলে, উহার সকল বাহু সমান হইবে ; অর্থাৎ বর্গক্ষেত্রের সকল বাহু সমান।

3. বর্গক্ষেত্রের সকল কোণ সমকোণ।

[ইঙ্গিত : বর্গক্ষেত্র একটি আয়ত বলিয়া, উহা একটি সামান্তরিক এবং উহার এক কোণ সমকোণ।]

4. রম্বস একটি সামান্তরিক। (C. U. 1923 ; S. F. 1973)

[রম্বসের চারি বাহু পরস্পর সমান বলিয়া স্পষ্টতঃই উহার বিপরীত বাহুগুলি সমান ; সুতরাং উপ. 3 এর ন্যায় প্রমাণ কর।]

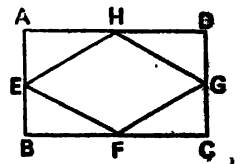
5. একই ভূমির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। [প্রশ্ন 4 দেখ।] (C. U. 1916)

6. সামান্তরিকের যে কোন বাহুসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় সমকোণ উৎপন্ন করে।

7. কোন আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু ক্রমান্বয়ে যোগ করিলে যে চতুর্ভুজ উৎপন্ন হয়, তাহা একটি রম্বস। (S. F. 1965)

[ইঙ্গিত : ABCD আয়তের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখাগুলি EFGH চতুর্ভুজ উৎপন্ন করিয়াছে।

এখন, $\triangle EAH \equiv \triangle EBF \equiv \triangle GCF \equiv \triangle GDH$;

কারণ, উহাদের যে কোনটির দুই বাহু ও অন্তর্ভূত কোণ অপর যে কোনটির দুই বাহু ও অন্তর্ভূত কোণের সমান।

$\therefore$ $EH = EF = GF = GH$; $\therefore$ চতুর্ভুজ EFGH একটি রম্বস।]

8. ABCD সামান্তরিকের AC কর্ণ যদি ∠A কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে উহা ∠C কেও সমদ্বিখণ্ডিত করিবে এবং সামান্তরিকটি একটি রম্বস হইবে। (C. U. 1926)

[ইঙ্গিত : ABC ও ADC ত্রিভুজদ্বয়ের ∠BAC = ∠DAC (কল্পনা),

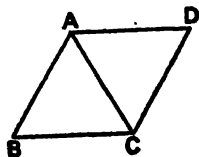
∠B = বিপরীত ∠D (উপ. 1) এবং AC = AC ;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ ∠ACB = ∠ACD,

∴ AB = অনুরূপ AD ; কিন্তু AB = CD এবং AD = BC

(সামান্তরিকের বিপরীত বাহু)।

∴ ABCD সামান্তরিকের বাহুগুলি সমান

∴ উহা একটি রম্বস।]

9. রম্বসের কর্ণ যে দুইটি কোণের মধ্য দিয়া গমন করে, তাহাদিগকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (C. U. 1916)

[ইঙ্গিত : ABCD রম্বসটির AC একটি কর্ণ (প্রশ্ন 8 এর চিত্র)। এখন, △ABC ≡ △ADC (∵ একটির তিন বাহু অপরটির তিন বাহুর সমান) ;

∴ ∠CAB = ∠CAD এবং ∠ACB = ∠ACD।]

10. কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় যদি সমান হয়, তবে উহা একটি আয়ত এবং উহার সকল কোণই সমকোণ। (C. U. 1924 ; D. B. 1942)

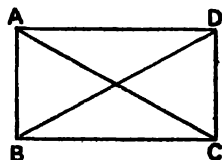
[ইঙ্গিত : ABCD সামান্তরিকের AC কর্ণ = BD কর্ণ।

এখন, △ABC ≡ △DCB (∵ একটির তিন বাহু অপরটির তিন বাহুর সমান) ;

∴ ∠ABC = ∠DCB ;

কিন্তু ∠ABC + ∠DCB = 2 সমকোণ

(∵ AB ∥ DC এবং BC উহাদের ভেদক) ;

∴ ∠ABC = 1 সমকোণ। ∴ ABCD একটি আয়ত এবং উহার সকল কোণ সমকোণ (প্রশ্ন 1)।]

11. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার ব্যবধান সর্বত্র সমান।

[ইঙ্গিত : একটি সরলরেখার যে কোন দুই বিন্দু হইতে অপরটির উপর লম্ব টানিয়া দেখাও যে, এই লম্বদ্বয় একটি সামান্তরিকের বিপরীত বাহু।]

12. আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান।

[ABCD আয়তের AC ও BD কর্ণ (প্রশ্ন 10 এর চিত্র)। এখন, △ABC ≡ △DCB ; ∴ AC = BD।]

13. বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান।

14. বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (C. U. 1922)

[প্রমাণের জন্য উপ. 3 এর অনুসিদ্ধান্ত দেখ।]

15. কোন সামান্তরিকের একটি কর্ণের মধ্যবিন্দু দিয়া উহার দুই বিপরীত বাহু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখা ঐ মধ্যবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। (C. U. 1931)

[কারণ, উৎপন্ন ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।]

16. রম্বসের কর্ণদ্বয় রম্বসকে চারিটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।
[কারণ, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]

17. সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি সমান্তরাল। (S. F. 67)

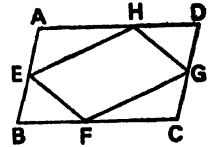
18. সামান্তরিকের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি আয়ত উৎপন্ন করে
[প্রশ্ন 6 এর সাহায্যে প্রমাণ কর।]

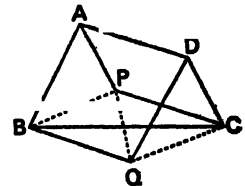
19. ABCD একটি সামান্তরিক এবং L ও M যথাক্রমে AB ও CDর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, ALMD একটি সামান্তরিক।
[ALMD চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু AL ও DM সমান ও সমান্তরাল। এখন উপ. 5 এর প্রমাণ দেখ।]

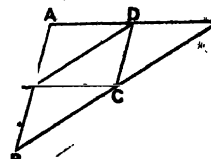
20. ABCD একটি সামান্তরিক। P ও Q যথাক্রমে AB ও CDর উপর দুইটি বিন্দু। যদি AP = CQ হয়, তবে BPDQ একটি সামান্তরিক।
[∵ AP = CQ, ∴ BP = DQ এবং উহারা সমান্তরাল; ∴ BPDQ একটি সামান্তরিক (উপ. 5)।]

21. কোন সামান্তরিকের পরস্পর বিপরীত দুই দুই বাহুর মধ্যবিন্দু যোগ করিলে যে চারিটি চতুর্ভুজ উৎপন্ন হয়, তাহাদের প্রত্যেকে সামান্তরিক। [প্রশ্ন 19 দেখ।]

22. ABCD সামান্তরিকের E, F, G ও H যথাক্রমে AB, BC, CD ও DAর উপর অবস্থিত বিন্দু। যদি AE = CG এবং AH = FC হয়, তবে EFGH একটি সামান্তরিক।

[ইঙ্গিত: △AEH ≡ △CGF ;
∴ EH = FG।
এইরূপ, EF = HG ;
∴ EFGH একটি সামান্তরিক (উপ. 3)।]

23. ABCD একটি চতুর্ভুজ। BADQ এবং ADCP দুইটি সামান্তরিক অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর, PQ, BC কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (S. F. 1961)

BP, CQ, PQ যোগ কর।
এখন, PC = AD = BQ এবং PC ∥ AD ∥ BQ ;
∴ PC ও BQ সমান ও সমান্তরাল।
∴ BPCQ একটি সামান্তরিক, যাহার PQ কর্ণ BC কর্ণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

24. ABCD সামান্তরিকের AB ও ADকে বর্ধিত করিয়া ABর সমান BP এবং ADর সমান DQ লওয়া হইল। দেখাও যে, P, C ও Q একই সরলরেখায় অবস্থিত। (S. F. '54)
[BD, CP ও CQ যোগ কর। এখন, ∵ AB ও DC সমান ও সমান্তরাল, ∴ BP ও DC সমান ও সমান্তরাল; ∴ PC ∥ BD। আবার, ∵ AD ও BC সমান ও সমান্তরাল, ∴ DQ ও BC সমান ও সমান্তরাল; ∴ CQ ∥ BD।

∴ C বিন্দুগামী PC ও CQ এর প্রত্যেকে একই BDর সমান্তরাল। ∴ PC ও CQ একই সরলরেখা।
∴ প্রমাণিত হইল।]

25. ABCD একটি চতুর্ভুজ। BADE এবং ADCF সামান্তরিকদ্বয় অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে, BC কে EF সমদ্বিখণ্ডিত করে। (S. F. 1972, '74)

[BE ও FC এর প্রত্যেকে ADর সমান ও সমান্তরাল ; ∴ BE ও FC সমান ও সমান্তরাল। ∴ BECF সামান্তরিকের EF কর্ণ BC কর্ণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]

26. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র এবং উহার AC কর্ণের উপর P যে কোন বিন্দু। দেখাও যে, P হইতে AB ও BCর দূরত্বের সমষ্টি নিয়ত সমান। (S. F. 1957)

[ABর উপর PE এবং BCর উপর PF লম্ব টান। এখন, PE = AE ($\because \angle EAP = 45^\circ$) এবং PF = EB (বিপরীত বাহু) ; ∴ PE + PF = AE + EB = AB, যাহা নিয়ত সমান।]

7. সমান্তরাল সরলরেখাঘটিত উপপাদ্য।

উপপাদ্য 7. তিন বা ততোধিক সমান্তরাল সরলরেখা কোন ভেদক হইতে সমান সমান অংশ ছিন্ন করিলে উহারা অপর যে কোন ভেদক হইতে সমান সমান অংশ ছিন্ন করিবে। [প্রমাণ কর।]

অনুসিদ্ধান্ত। কোন ত্রিভুজের ভূমির সহিত সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত কতকগুলি সরলরেখা যদি ত্রিভুজটির এক বাহুকে কতিপয় সমান অংশে বিভক্ত করে, তবে উহারা অপর বাহুটিকেও তুল্যসংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করিবে।

[ত্রিভুজটির শীর্ষ দিয়া এবং ভূমির সহিত সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা টানিয়া প্রমাণ কর।]

উপপাদ্য 8. ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া এবং দ্বিতীয় বাহুর সহিত সমান্তরাল করিয়া সরলরেখা টানিলে উহা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং দ্বিতীয় বাহুর অর্ধেক হয়। [প্রমাণ কর।]

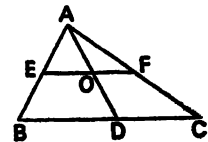
উপপাদ্য 9. ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক। [প্রমাণ কর।]

অনুশীলনী 2

1. ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমি পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখা অপর দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়। (S. F. 1973)

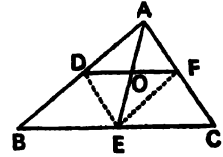
[ইঙ্গিত : ABC ত্রিভুজের A শীর্ষ হইতে ভূমি পর্যন্ত অঙ্কিত AD একটি সরলরেখা। AB ও ACর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F এবং উহাদের সংযোজক EF সরলরেখা AD কে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এখন, E, ABর এবং F, ACর মধ্যবিন্দু ;

∴ EF ∥ BC (উপ. 9)।

আবার, ABD ত্রিভুজে E, ABর মধ্যবিন্দু এবং EO ∥ BD (প্রমাণিত) ;

∴ O, ADর মধ্যবিন্দু (উপ. 8) ; ∴ EF, AD কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]

2. ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা (1) ত্রিভুজকে 1 ও 3 এর অনুপাতে বিভক্ত করে এবং (2) উহা ও তৃতীয় বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[ABC ত্রিভুজের D, E ও F যথাক্রমে AB, BC ও ACর মধ্যবিন্দু এবং DF ও AEর O ছেদবিন্দু। ED, EF যোগ কর।

প্রমাণ। (1) AD ও FE পরস্পর সমান ও সমান্তরাল (উপ. 9),

∴ ADEF একটি সামান্তরিক (উপ. 5) ; ∴ $\triangle DEF \equiv \triangle DAF$ (উপ. 1)।

এইরূপ, $\triangle DEF \equiv \triangle DBE$ এবং $\triangle DEF \equiv \triangle FCE$;

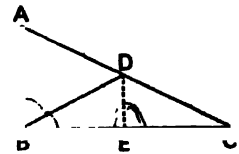
∴ $\triangle DAF$: চতুর্ভুজ DBCF $= 1 : 3$।

(2) AE ও DF, ADEF সামান্তরিকের কর্ণ বলিয়া উহারা পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে (উপ. 2)।]

3. ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দুগুলি যোগ করিলে তিনটি সামান্তরিক এবং চারিটি সর্বসম ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়। [প্রশ্ন 2 এর প্রমাণ দেখ।]

4. সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু হইতে অতিভুজের মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখা অতিভুজের অর্ধেক। (C. U. 1919 ; S. F. 1954)

[ABC ত্রিভুজের B সমকোণ এবং D, ACর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $BD = \frac{1}{2}AC$।

D ও BCর মধ্যবিন্দু E যোগ কর।

প্রমাণ। AB ∥ DE (উপ. 9) ;

∴ $\angle DEC =$ অনুরূপ $\angle ABE = 1$ সমকোণ ;

∴ $\angle DEB = 1$ সমকোণ ; ∴ $\triangle DEB \equiv \triangle DEC$; ∴ $BD = DC = \frac{1}{2}AC$।]

5. সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ অপরটির দ্বিগুণ হইলে, অতিভুজটি ক্ষুদ্রতর বাহুর দ্বিগুণ হইবে। (C. U. 1858, 1945 ; S. F. 1956)

[ABC ত্রিভুজের (প্রশ্ন 4 এর চিত্র) $\angle B$ সমকোণ, $\angle A = 60°$, $\angle C = 30°$ AB ক্ষুদ্রতম বাহু এবং D, ACর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ। $BD = \frac{1}{2}AC$ (প্রশ্ন 4) $= AD$; ∴ $\angle ABD = \angle A = 60°$;

∴ তৃতীয় $\angle ADB = 60°$; ∴ $AD = AB$; ∴ $AC = 2AD = 2AB$।]

6. F ও E যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের AB ও ACর মধ্যবিন্দু। যদি BE ও CF এর ছেদবিন্দু G হয় এবং H ও K যথাক্রমে BG ও CGর মধ্যবিন্দু হয়, তবে EFHK একটি সামান্তরিক। (S. F. 1959)

[ইঙ্গিত : FE ∥ BC ও $FE = \frac{1}{2}BC$ এবং HK ∥ BC ও $HK = \frac{1}{2}BC$; ∴ FE এবং HK সমান ও সমান্তরাল। ∴ EFHK একটি সামান্তরিক।]

7. কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি ক্রমান্বয়ে যোগ করিলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হইবে এবং উহার বাহুসমষ্টি ঐ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইবে। (S. F. 1954, '63)

[ABCD চতুর্ভুজে E, F, G, H যথাক্রমে AB, BC, CD, DAর মধ্যবিন্দু।

EF, FG, GH, EH, AC, BD যোগ কর।

প্রমাণ। ∵ EH ∥ FG (∵ প্রত্যেকে BDর সমান্তরাল)

এবং EH = FG (∵ প্রত্যেকে BDর অর্ধেক);

∴ EFGH একটি সামান্তরিক

এবং $EF+FG+GH+EH=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BD=AC+BD$।]

8. চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (C. U. 1939 ; S. F. 1962, '70)

[প্রশ্ন 7 এর চিত্রে EG ও HF যোগ কর।

প্রমাণ। EFGH একটি সামান্তরিক (প্রশ্ন 7) এবং EG ও HF উহার দুই কর্ণ।

∴ EG ও HF পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে (উপ. 2)।]

9. ট্রাপিজিয়মের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা (1) সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সহিত সমান্তরাল, (2) কর্ণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক এবং (3) সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধেক। (C. U. 1936, '41 ; S. F. 1961)

[ABCD ট্রাপিজিয়মের AB ও DC অসমান্তরাল বাহু এবং XY উহাদের মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা।

Y দিয়া ABর সমান্তরাল EF টান; উহা যেন BC কে E বিন্দুতে এবং বর্ধিত AD কে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, (1) ∵ ABEF একটি সামান্তরিক, ∴ AB = FE

এবং ∵ △DYF ≡ △CYE, ∴ FY = YE ; ∴ AX = FY, এবং AX ∥ FY,

∴ XY ∥ AD (উপ. 5) এইরূপ, XY ∥ BC।

(2) ∵ ABC ত্রিভুজে X, ABর মধ্যবিন্দু এবং XY ∥ BC, ∴ XY, AC কে সমদ্বিখণ্ডিত করে (উপ. 8)। এইরূপ XY, BD কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(3) $XY=\frac{1}{2}(AF+BE)=\frac{1}{2}(AD+BC)$ (∵ DF = EC)।]

10. ABCD সামান্তরিকের বহিঃস্থ কোন সরলরেখার উপর AP, BQ, CR ও DS লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে, AP + CR = BQ + DS। (S. F. 1964)

[AC ও BD কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু যেন O। PR এর উপর OT লম্ব টান।

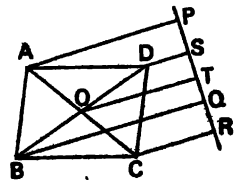
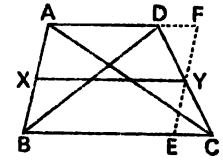
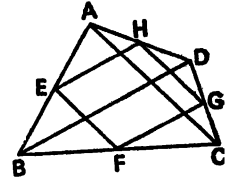
এখন, AP, OT ও CR পরস্পর সমান্তরাল (∵ উহারা একই সরলরেখার উপর লম্ব) এবং O, ACর মধ্যবিন্দু (উপ. 2);

∴ T, PR এর মধ্যবিন্দু (উপ. 7)।

∴ ACRP ট্রাপিজিয়মে AP + CR = 2OT (প্রশ্ন 9)।

আবার, DS, OT ও BQ সমান্তরাল এবং O, BDর মধ্যবিন্দু (উপ. 2);

∴ T, SQর মধ্যবিন্দু। ∴ DBQS ট্রাপিজিয়মে BQ + DS = 2OT (প্রশ্ন 9)।

∴ AP + CR = BQ + DS।]

8. ক্ষেত্রফল বিষয়ক উপপাদ্য।

উপপাদ্য 10. একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখা-দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

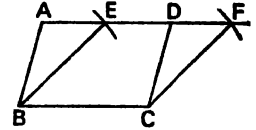
[প্রমাণ কর।]

অনুসিদ্ধান্ত। একই ভূমি ও সমান সমান উচ্চতাবিশিষ্ট সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান। (C. U. 1940 ; S. F. 1958)

[একই ভূমি এবং সমান সমান উচ্চতাবিশিষ্ট বলিয়া সামান্তরিকগুলি একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। এখন উপপাদ্য 10 এর ন্যায় প্রমাণ কর।]

অনুশীলনী 3

1. একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট করিয়া একই ভূমির উপর একটি রম্বস আঁক। কিরূপ স্থলে অঙ্কনকার্য অসম্ভব হইবে ? (C. U. 1935)

[ABCD যেন নির্দিষ্ট সামান্তরিক। B ও C কে কেন্দ্র করিয়া এবং ভূমি BC কে ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ আঁক, যাহারা AD ও বর্ধিত AD কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে কাটিল। EBCF উদ্দিষ্ট রম্বস হইবে। ক্ষুদ্রতর বাহুকে ভূমি ধরিলে অঙ্কনকার্য অসম্ভব হইবে।]

2. একটি নির্দিষ্ট আয়তের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট করিয়া একই ভূমির উপর একটি রম্বস অঙ্কিত কর। [প্রশ্ন 1 এর অঙ্কন প্রণালী গ্রহণ কর।] (C. U. 1933)

3. কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র সরলরেখাটির অর্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের চারি গুণ।

4. কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র সরলরেখাটির এক-তৃতীয়াংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের নয় গুণ।

5. একই ভূমি এবং সমান উন্নতিবিশিষ্ট সামান্তরিকগুলির মধ্যে আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা ক্ষুদ্রতম।

[ইঙ্গিত : একই BC ভূমির উপর সমান উন্নতিবিশিষ্ট EBCF আয়ত এবং ABCD যে কোনও সামান্তরিক। এখন, ▭EBCF এর পরিসীমা $=2(EB+BC)$ এবং ▱ABCDর পরিসীমা $=2(AB+BC)$। কিন্তু AEB সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AB অপেক্ষা EB ক্ষুদ্রতর ;

$\therefore\ 2(EB+BC) < 2(AB+BC)$, অর্থাৎ আয়ত EBCF এর পরিসীমা, যে কোনও সামান্তরিক ABCDর পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।]

6. একই ভূমির উপর অবস্থিত একটি বর্গক্ষেত্র ও একটি রম্বসের মধ্যে কোনটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তর ? (C. U. 1940 ; S. F. 1973)

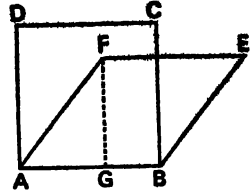
[AB ভূমির উপর অবস্থিত ABCD একটি বর্গক্ষেত্র এবং ABEF একটি রম্বস। FG, রম্বসটির উচ্চতা।

প্রমাণ। ABCD বর্গক্ষেত্র = AB.AD = AB.AF

এবং ABEF রম্বস = AB.FG ;

কিন্তু AFG সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AF > FG,

∴ AB.AF > AB.FG ;

∴ ABCD বর্গক্ষেত্র > ABEF রম্বস।]

উপপাদ্য 11. একটি ত্রিভুজ ও একটি আয়ত একই ভূমির উপর অবস্থিত এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট হইলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল আয়তটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে। [প্রমাণ কর।]

অনুসিদ্ধান্ত। একটি ত্রিভুজ ও একটি আয়ত সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত এবং সমান সমান উচ্চতাবিশিষ্ট হইলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল আয়তটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে। (C. U. 1930)

[উপরিপাতন দ্বারা উহাদিগকে একই ভূমি এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট করিয়া উপপাদ্য 11 এর ন্যায় প্রমাণ কর।]

অনুশীলনী 4

1. একটি ত্রিভুজের ভূমি, অপর এক বাহু এবং ক্ষেত্রফল দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। (C. U. 1931)

[ত্রিভুজটির উচ্চতা নির্ণয় কর। তৎপর ভূমি, অপর এক বাহু ও উচ্চতার সাহায্যে ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

2. ABC ত্রিভুজের B কোণ সমকোণ এবং BD, ACর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, $BD = \frac{AB.BC}{AC}$।

উপপাদ্য 12. একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত থাকিলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে। [প্রমাণ কর।]

উপপাদ্য 13. একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সররেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান। [প্রমাণ কর।]

অনুসিদ্ধান্ত 1. সমান সমান ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান। (S. F. 1958, '61)

[দুইটি ত্রিভুজ লইয়া একটির ভূমিকে অপরটির ভূমির উপর সমপাতিত কর। এখন, উপপাদ্য 13 এর ন্যায় প্রমাণ কর।]

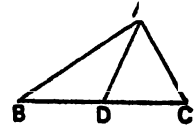
অনুসিদ্ধান্ত 2. সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত এবং সমান সমান উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান। (C. U. 1912, '15, '34, '46)

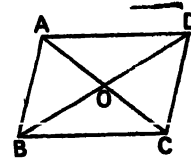
[দুইটি ত্রিভুজ লইয়া একটির ভূমিকে অপরটির ভূমির উপর সমপাতিত কর। ত্রিভুজদ্বয়ের উচ্চতা সমান বলিয়া উহারা একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত থাকিবে। এখন, উপপাদ্য 13 এর ন্যায় প্রমাণ কর।]

অনুশীলনী 5

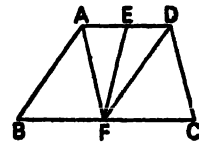
1. ত্রিভুজের যে কোন মধ্যমা ত্রিভুজকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে। (D. B. 1948)

2. একটি সমকোণী ত্রিভুজকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে বিভক্ত করা যায়।

[ইঙ্গিত : ABC সমকোণী ত্রিভুজের BC অতিভুজ এবং D, BCর মধ্যবিন্দু। AD যোগ কর। এখন, DB = DA = DC (অনুশীলনী 2 এর প্রশ্ন 4 দেখ।), ∴ ADB ও ADC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং ইহাদের ভূমি DB = DC এবং একই উচ্চতা বলিয়া, △ABD = △ADC।]

3. সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিককে চারিটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করে। (S. F. 1952)

[ইঙ্গিত : ▱ABCDর কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O।
এখন, AOB ও BOC ত্রিভুজদ্বয়ের ভূমি AO = OC (উপ 2) এবং উচ্চতা একই, ∴ △AOB = △BOC।
আবার, BOC ও COD ত্রিভুজদ্বয়ের ভূমি BO = OD (উপ 2) এবং উচ্চতা একই, ∴ △BOC = △COD। অনুরূপে, △COD = △DOA।]

4. ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা ট্রাপিজিয়মকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ট্রাপিজিয়মে বিভক্ত করে।

[ইঙ্গিত : ABCD ট্রাপিজিয়মের AD ∥ BC এবং উহাদের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F। FA, FE এবং FD যোগ কর।

এখন, △ABF = △DFC, কারণ উহাদের ভূমি BF = FC এবং উহারা একই সমান্তরাল সরলরেখা AD ও BCর মধ্যে অবস্থিত। আবার, △FAE = △FED, কারণ উহাদের ভূমি AE = ED এবং উহাদের উচ্চতা একই। ∴ △ABF + △FAE = △DFC + △FED, অর্থাৎ চতুর্ভুজ ABFE = চতুর্ভুজ EFCD।]

উপপাদ্য 14. একই ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

[প্রমাণ কর।]

9. সমবিন্দু সরলরেখা বিষয়ক উপপাদ্য।

উপপাদ্য 15. ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর উহাদের মধ্যবিন্দুত্রয় হইতে অঙ্কিত লম্বগুলি সমবিন্দু। [প্রমাণ কর।]

উপপাদ্য 16. ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু। [প্রমাণ কর।]

উপপাদ্য 17. ত্রিভুজের দুই কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক এবং তৃতীয় কোণের অন্তঃ-সমদ্বিখণ্ডক সমবিন্দু। [প্রমাণ কর।]

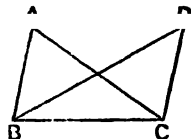
উপপাদ্য 18. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু। [প্রমাণ কর।]

অনুসিদ্ধান্ত। ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় একটি সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। [প্রমাণ কর।]

উপপাদ্য 19. ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু। [প্রমাণ কর।]

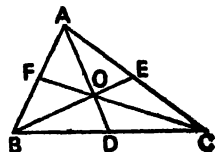
অনুশীলনী 6

1. যে চতুর্ভুজ উহার প্রত্যেক কর্ণ দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়, তাহা একটি সামান্তরিক। (S. F. 1967)

[ABCD চতুর্ভুজটি উহার দুই কর্ণ AC ও BD দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। এখন, $\triangle ABC = \triangle DBC$ (কল্পনা) এবং উহারা একই BC ভূমির উপর একই পার্শ্বে অবস্থিত; $\therefore AD \parallel BC$ (উপ. 14)। অনুরূপে, $AB \parallel DC$.
$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।]

2. যদি কোন ত্রিভুজের এক বাহু অপর এক বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে ক্ষুদ্রতর বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা বৃহত্তর বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[ইঙ্গিত : ABC ত্রিভুজের $AC > AB$ এবং BE ও CF যথাক্রমে AC ও ABর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা। প্রমাণ করিতে হইবে, $CF > BE$।

BCর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা AD টান। মধ্যমাত্রয় যেন পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন, ADC ও ADB ত্রিভুজদ্বয়ের $AD = AD$ এবং $DC = DB$, কিন্তু $AC > AB$ (কল্পনা) ; $\therefore \angle ADC > \angle ADB$,
$\angle ODC > \angle ODB$। আবার, ODC ও ODB ত্রিভুজদ্বয়ের $OD = OD$ এবং $DC = DB$ কিন্তু $\angle ODC > \angle ODB$ (প্রমাণিত) ; $\therefore CO > BO$।

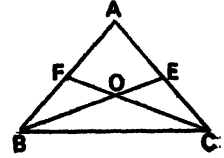
$\therefore \frac{3}{2}CO > \frac{3}{2}BO$; $\therefore CF > BE$ (অনুসিদ্ধান্ত, উপ. 18)।]

3. কোন ত্রিভুজের দুইটি মধ্যমা সমান হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে। (S. F. 1954)

[ইঙ্গিত : মধ্যমা BE = মধ্যমা CF ;

∴ উহাদের $\frac{2}{3}$, BO = CO ;

∴ ∠EBC = ∠FCB ; ∴ △EBC ≡ △FCB ;

∴ FB = EC ; ∴ AB = AC ;

∴ △ABC সমদ্বিবাহু।]

4. কোন ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা সমান হইলে ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

[প্রশ্ন 3 এর সাহায্যে প্রমাণ কর।]

5. ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমার সমষ্টি ত্রিভুজের পরিসীমার তিন-চতুর্থাংশ অপেক্ষা বৃহত্তর। (B. C. S. 1946)

[ইঙ্গিত : প্রশ্ন 2 এর চিত্রে, ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এখন, (OA + OB) > AB, (OB + OC) > BC এবং (OC + OA) > CA ;

∴ যোগ করিয়া, 2(OA + OB + OC) > (AB + BC + CA),

বা (OA + OB + OC) > $\frac{1}{2}$(AB + BC + CA)।

আবার, OA + OB + OC = $\frac{2}{3}$(AD + BE + CF) [অনুসি., উপ. 18] ;

∴ $\frac{2}{3}$(AD + BE + CF) > $\frac{1}{2}$(AB + BC + CA) ;

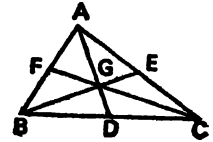
∴ (AD + BE + CF) > $\frac{3}{4}$(AB + BC + CA)।]

6. ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, △BGC = $\frac{1}{3}$△ABC।

[ইঙ্গিত : △BGC = △BGD + △CGD

= $\frac{1}{3}$△BAD + $\frac{1}{3}$△CAD

(∵ GD = $\frac{1}{3}$AD)

= $\frac{1}{3}$(△BAD + △CAD) = $\frac{1}{3}$△ABC।]

7. ABC ত্রিভুজের G ভরকেন্দ্র। প্রমাণ কর যে, △BGC = △CGA = △AGB। (S. F. 1961, '74)

[কারণ, প্রত্যেকটি △ = $\frac{1}{3}$△ABC (প্রশ্ন 6 এর চিত্র ও প্রমাণ দেখ।]

8. ABC ত্রিভুজের BE ও CF মধ্যমাদ্বয় পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, △BGC = চতুর্ভুজ AFGE। (S. F. 1964)

[ইঙ্গিত : △BGC = △BGD + △CGD (প্রশ্ন 6 এর চিত্র)

= $\frac{1}{2}$△BAG + $\frac{1}{2}$△CAG (∵ GD = $\frac{1}{2}$AG)

= △FAG + △EAG (∵ FA = $\frac{1}{2}$BA এবং EA = $\frac{1}{2}$CA)

= চতুর্ভুজ AFGE।]

10. বিবিধ অঙ্কন বিষয়ক সম্পাদ্য।

সম্পাদ্য 1. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে যে কোনও সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে। [অঙ্কন ও প্রমাণ কর।]

সম্পাদ্য 2. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে। [অঙ্কন ও প্রমাণ কর।]

সম্পাদ্য 3. একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার এক বাহু একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হইবে। [অঙ্কন ও প্রমাণ কর।]

7

1. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর, যাহার একটি কোণ 45°।

2. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়ত অঙ্কিত কর।

3. একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর, যাহার এক বাহু একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান হইবে এবং এক কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে। (C. U. 1944)

[প্রদত্ত সামান্তরিকের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট করিয়া প্রদত্ত কোণবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক আঁক (উপ. 10 দেখ।)। তৎপর সম্পাদ্য 3 এর ন্যায় অঙ্কন কর।]

4. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়ত অঙ্কিত কর, যাহার এক বাহু একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হইবে। (C. U. 1946)

[নির্দিষ্ট ত্রিভুজটির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়ত অঙ্কিত কর (সম্পাদ্য 2)। তৎপর সম্পাদ্য 3 এর ন্যায় অঙ্কন কর।]

সম্পাদ্য 4. একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে। [অঙ্কন ও প্রমাণ কর।]

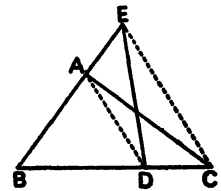
সম্পাদ্য 5. একটি নির্দিষ্ট বহুভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে। [অঙ্কন ও প্রমাণ কর।]

অনুশীলনী 8

1. কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর। (S. F. 1966, '74)

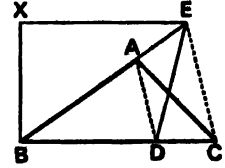
[মনে কর, △ABCর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে, যাহার ভূমি = BD।

AD যোগ কর। C হইতে DAর সমান্তরাল CE টান, যাহা বর্ধিত BAর সহিত E বিন্দুতে মিলিত হইল। DE যোগ কর। প্রমাণ কর যে, BED উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।]

E A B D C

2. কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর, যাহার ভূমিসংলগ্ন একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

3. কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

4. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর, যেন উহা নির্দিষ্ট উচ্চতাবিশিষ্ট হয়। (S. F. 1958)

[মনে কর, △ABCর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে, যাহার উচ্চতা hএর সমান।

hএর সমান করিয়া BCর উপর BX লম্ব টান। BCর সমান্তরাল XE টান, যাহা বর্ধিত BAর সহিত E বিন্দুতে মিলিত হইল। EC যোগ কর। ECর সমান্তরাল AD টান, যাহা BCর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইল। ED যোগ কর। প্রমাণ কর যে, EBD উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।]

5. দুইটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমষ্টির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

[ত্রিভুজদ্বয়ের প্রথমটিকে দ্বিতীয়টির সমান উচ্চতাবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজে পরিণত কর (প্রশ্ন 4)। দ্বিতীয় ও তৃতীয় ত্রিভুজের ভূমির সমষ্টির সমান ভূমির উপর উহাদের উচ্চতার সমান উচ্চতাবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। প্রমাণ কর যে, ইহাই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।]

6. দুইটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তরের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। [প্রশ্ন 5 এর অনুরূপ অঙ্কন প্রণালী গ্রহণ কর।]

7. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর, যেন উহার ভূমি একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হয় এবং একটি কোণ 60° হয়।

[নির্দিষ্ট ত্রিভুজটিকে 60° কোণবিশিষ্ট একটি সমান সামান্তরিকে পরিণত কর (সম্পাদ্য 2) ; তৎপর সম্পাদ্য 3 এর ন্যায় অঙ্কন কর।]

সম্পাদ্য 6. একটি ত্রিভুজের যে কোন বাহুস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমান দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে। [অঙ্কন ও প্রমাণ কর।]

সম্পাদ্য 7. একটি ত্রিভুজের যে কোন বাহুস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে দুইটি সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমান তিন অংশে বিভক্ত করিতে হইবে। [অঙ্কন ও প্রমাণ কর।]

সম্পাদ্য 8. একটি চতুর্ভুজের কোন শীর্ষ হইতে সরলরেখা টানিয়া চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে। [অঙ্কন ও প্রমাণ কর।]

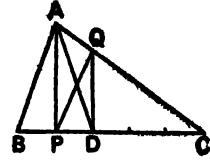
অনুশীলনী 9

1. কোন ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমত্রিখণ্ডিত কর।
2. কোন ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে সরলরেখা টানিয়া উহার $\frac{1}{4}$ অংশ কাটিয়া লও।

[illegible]

[illegible]

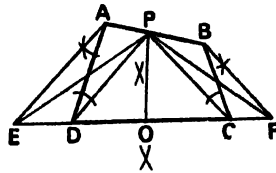
3 এর অনুপাতে বিভক্ত কর।

[ABC ত্রিভুজের BC বাহুস্থিত P একটি বিন্দু। BC কে সমান 5 (= 2 + 3) অংশে বিভক্ত কর (সম্পাত 1) এবং 2 অংশের সমান করিয়া BD লও। তাহা হইলে $\triangle ABD : \triangle ADC = 2 : 3$ হইল। PA যোগ কর। PAর সমান্তরাল DQ টান, উহা যেন AC কে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। PQ যোগ কর। তাহা হইলে চতুর্ভুজ ABPQ : $\triangle PQC = 2 : 3$ হইবে।]

4. একটি চতুর্ভুজের কোন শীর্ষ হইতে সরলরেখা টানিয়া উহার $\frac{1}{3}$ অংশ লও।

5. কোন চতুর্ভুজের এক শীর্ষ হইতে সরলরেখা টানিয়া উহাকে 2 : 3 এর অনুপাতে বিভক্ত কর।

6. কোন চতুর্ভুজের কোন বাহুস্থিত একটি বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর (C. U. 1941, '49)

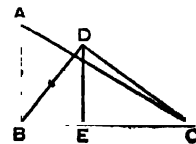
[ABCD চতুর্ভুজের AB বাহুস্থিত P একটি বিন্দু P হইতে সরলরেখা টানিয়া চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

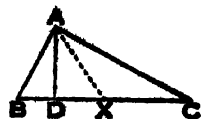
PD ও PC যোগ কর। PDর সমান্তরাল AE এবং PCর সমান্তরাল BF টান। উহারা যেন উভয়দিকে বর্ধিত DC কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল।

EF কে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। তাহা হইলে PO, ABCD চতুর্ভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। প্রমাণ কর।]

অনুশীলনী 10

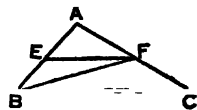
(বিবিধ প্রশ্ন)

1. কোন ত্রিভুজের দুই বাহু নির্দিষ্ট থাকিলে উহাদের অন্তর্গত কোণ যখন সমকোণ, তখন উহার ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হইবে।

[ইঙ্গিত : ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজের B সমকোণ এবং DBC অপর যে কোনও ত্রিভুজ ; প্রথমটির AB ও BC যথাক্রমে দ্বিতীয়টির DB ও BCর সমান। DE যেন BCর উপর লম্ব। এখন, $\triangle ABC = \frac{1}{2}BC.AB$ এবং $\triangle DBC = \frac{1}{2}BC.DE$। আবার, DBE সমকোণী ত্রিভুজের $DB > DE$; $\therefore AB > DE$। $\therefore \frac{1}{2}BC.AB > \frac{1}{2}BC.DE$; $\therefore \triangle ABC > \triangle DBC$।]

2. যদি একটি ত্রিভুজের দুই বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর সমান হয় এবং উহাদের অন্তর্গত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

[illegible] AX [illegible] XB [illegible] সমান এবং উহাদের অন্তর্গত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। এখন, ∵ $\angle AXB + \angle AXC$ $=2$ সমকোণ, ∴ BX ও XC একই সরলরেখা এবং BCর উপর পতিত AD লম্ব উভয় ত্রিভুজেরই উচ্চতা।
∴ $\triangle AXB = \frac{1}{2} BX.AD$ এবং $\triangle AXC = \frac{1}{2} CX.AD$, কিন্তু $BX = CX$ (কল্পনা), ∴ $\triangle AXB = \triangle AXC$।]

3. যদি একটি সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত বাহু যথাক্রমে অপর একটি সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত বাহুব সমান হয় এবং উহাদের অন্তর্গত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক হয়, তবে সামান্তবিক দুইটির ক্ষেত্রফল পরস্পব সমান।

4. ABC ত্রিভুজের E ও F যথাক্রমে AB ও ACর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\triangle AEF = \frac{1}{4} \triangle ABC$।

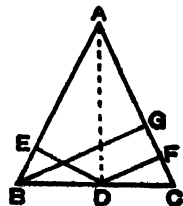
[ইঙ্গিত: BF যোগ কব। এখন, ABF ত্রিভুজে EF, ABর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা, ∴ $\triangle AEF = \frac{1}{2} \triangle ABF$।
আবার, ABC ত্রিভুজে BF, ACর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা,
∴ $\triangle ABF = \frac{1}{2} \triangle ABC$। ∴ $\triangle AEF = \frac{1}{2} \triangle ABF = \frac{1}{4} \triangle ABC$।]

5. ABC ত্রিভুজেব D ও E যথাক্রমে AB ও ACর মধ্যবিন্দু এবং বর্ধিত BCর উপর P একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\triangle PDE = \frac{1}{4} \triangle ABC$। (S. F. 1964)
[$\triangle PDE = \frac{1}{2} \triangle ABE = \frac{1}{4} \triangle ABC$।]

6. ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F এবং BC ভূমির উপব D যে কোন বিন্দু। প্রমাণ কর যে চতুর্ভুজ $AEDF = \frac{1}{2} \triangle ABC$। (S. F. 1972)

7. ABCD চতুর্ভুজেব AC কর্ণ BD কর্ণকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কবে। প্রমাণ কর যে AC, চতুর্ভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে।
[ভূমি OB = ভূমি OD, ∴ $\triangle AOB = \triangle AOD$ এবং $\triangle COB = \triangle COD$, ইত্যাদি।]

8 সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির যে কোন বিন্দু হইতে অপব দুই বাহুর উপর পতিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি, ভূমির এক প্রান্ত হইতে বিপরীত বাহুর উপর পতিত লম্বের সমান। (S. F. 1957)

[ইঙ্গিত: ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজেব $AB = AC$ এবং BC ভূমির যে কোন বিন্দু D হইতে AB ও ACর উপর যথাক্রমে DE ও DF লম্ব এবং ACর উপর BG লম্ব। AD যোগ কর।
এখন, $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD = \frac{1}{2} AB.DE + \frac{1}{2} AC\ DF$

$= \frac{1}{2} AC.DE + \frac{1}{2} AC.DF = \frac{1}{2} AC(DE + DF)$।
আবার, $\triangle ABC = \frac{1}{2} AC.BG$, ∴ $DE + DF = BG$।]

9. সমবাহু ত্রিভুজের অন্তর্গত যে কোন বিন্দু হইতে উহার বাহুত্রয়ের উপর পতিত লম্বের সমষ্টি ত্রিভুজটির উন্নতির সমান অথবা যে কোন কৌণিক বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর পতিত লম্বের সমান।

আবার, $\because$ EC $=\frac{1}{2}$AC ; $\therefore$ $\triangle$ECB $=\frac{1}{2}\triangle$ABC।

$\therefore$ $\triangle$DBC $=\triangle$ECB এবং উহারা একই ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত ; $\therefore$ DE $\parallel$ BC (উপ. 14)।]

11. উপপাদ্য 13 ও 14 এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সহিত সমান্তরাল। (C. U. 1936)

[ইঙ্গিত : ABCD ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহু ABর E মধ্যবিন্দু এবং CDর F মধ্যবিন্দু। EF, CA, CE, BD, BF যোগ কর। এখন, EB $=\frac{1}{2}$AB ; $\therefore$ $\triangle$EBC $=\frac{1}{2}\triangle$ABC। আবার, FC $=\frac{1}{2}$DC ; $\therefore$ $\triangle$FBC $=\frac{1}{2}\triangle$DBC। কিন্তু $\triangle$ABC $=\triangle$DBC (উপ. 13) ; $\therefore$ $\triangle$EBC $=\triangle$FBC এবং উহারা একই ভূমি BCর উপর একই পার্শ্বে অবস্থিত,

$\therefore$ EF $\parallel$ BC (উপ. 14) ; কিন্তু BC $\parallel$ AD ; $\therefore$ EF $\parallel$ AD।]

12. সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজ একই ভূমির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, উহাদের শীর্ষদ্বয়-সংযোজক সরলরেখা ভূমি দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

13. যদি কোন চতুর্ভুজের একটি কর্ণ উহাকে দুইটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করে, তবে ঐ কর্ণ অপর কর্ণটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

14. কোন ট্রাপিজিয়মের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের একটির দুই প্রান্তের সহিত অপরটির মধ্যবিন্দু যোগ করিলে উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে। (S. F. 1966)

[ইঙ্গিত : ABCD ট্রাপিজিয়মের AB ও CD অসমান্তরাল বাহু এবং E, ABর মধ্যবিন্দু। AC, BD, EC, ED যোগ কর।

এখন, EB $=\frac{1}{2}$AB ; $\therefore$ $\triangle$EBC $=\frac{1}{2}\triangle$ABC।

আবার, EA $=\frac{1}{2}$BA ; $\therefore$ $\triangle$EAD $=\frac{1}{2}\triangle$BAD $=\frac{1}{2}\triangle$CAD ($\because$ AD $\parallel$ BC), $\therefore$ $\triangle$EBC $+\triangle$EAD $=\frac{1}{2}(\triangle$ABC $+\triangle$CAD$)=\frac{1}{2}$ ট্রাপিজিয়ম ABCD।

$\therefore$ ট্রাপিজিয়মটির অবশিষ্টাংশ, অর্থাৎ $\triangle$DEC $=\frac{1}{2}$ ট্রাপিজিয়ম ABCD।]

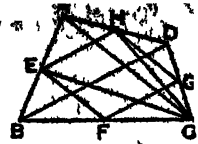
15. কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি ক্রমান্বয়ে যোগ করিলে উৎপন্ন সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

[ইঙ্গিত : ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD ও DA বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি যথাক্রমে E, F, G ও H। EF, FG, GH, HE, AC, BD, CE, CH যোগ কর।

[illegible]

মধ্যবিন্দু) [illegible] $\triangle HDG$ [illegible]

মধ্যবিন্দু) $= \frac{1}{4} \triangle ADG$ ($\because$ H, AD-র মধ্যবিন্দু)।

$\therefore$ $\triangle EBF + \triangle HDG = \frac{1}{4}(\triangle ABC + \triangle ADC) =$ $\frac{1}{4}$ চতুর্ভুজ ABCD। অনুরূপে, $\triangle EAH + \triangle FCG =$ $\frac{1}{4}$ চতুর্ভুজ ABCD ; $\therefore$ $\triangle EBF + \triangle HDG + \triangle EAH +$ $\triangle FCG = \frac{1}{2}$ চতুর্ভুজ ABCD। $\therefore$ অবশিষ্টাংশ ▭EFGH $= \frac{1}{2}$ চতুর্ভুজ ABCD।]

বৃত্ত

11. যদিও বৃত্ত বলিলে পরিধি দ্বারা পরিবেষ্টিত সমগ্র ক্ষেত্রকে বুঝায়, তথাপি স্থলবিশেষে পরিধিকে বৃত্ত বলা হয়।

12. যে সকল বৃত্তের একই কেন্দ্র, তাহাদিগকে **এককেন্দ্রীয়** (Concentric circles) বলে।

13. ব্যাস পরিধিকে দুইটি সমান চাপে বিভক্ত করে। ব্যাস ভিন্ন অপর যে কোন জ্যা পরিধিকে দুইটি অসমান চাপে বিভক্ত করে। উহাদের ভিতর বৃহত্তর চাপটিকে **অধিচাপ** (Major arc) এবং ক্ষুদ্রতর চাপটিকে **উপচাপ** (Minor arc) বলে।

14. অধিচাপ ও উপচাপ একত্রযোগে পরিধির সমান বলিয়া উহাদের প্রত্যেকটিকে অপরটির **অনুবন্ধী** (Conjugate) **চাপ** বলে।

15. কোন জ্যা বৃত্তকে যে দুই অংশে বিভক্ত করে, তাহাদের প্রত্যেকটিকে **বৃত্তাংশ** (Segment of a circle) বলে। অতএব একটি জ্যা এবং ঐ জ্যা যে চাপ ছিন্ন করে, এই উভয়ের দ্বারা বৃত্তাংশ সীমাবদ্ধ থাকে।

16 বৃত্তাংশের জ্যাকে বৃত্তাংশের **ভূমি** (Base) বলে।

17. বৃত্তাংশের চাপের কোন বিন্দু হইতে উহার ভূমির দুই প্রান্ত পর্যন্ত সরলরেখা টানিলে উৎপন্ন অন্তর্গত কোণকে **বৃত্তাংশস্থ কোণ** (Angle in a segment) বলে।

18. দুইটি ব্যাসার্ধ এবং তাহাদের দ্বারা ছিন্ন একটি বৃত্তচাপ এই তিনের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **বৃত্তকলা** (Sector of a circle) বলে।

19. বৃত্তকলার ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তর্গত কোণকে **বৃত্তকলার কোণ** বলে।

20. যদি চারিটি বা ততোধিক বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা সম্ভব হয়, তবে ঐ বিন্দুগুলিকে **বৃত্তস্থ** বা **সমবৃত্ত** (Concyclic) **বিন্দু** বলে।

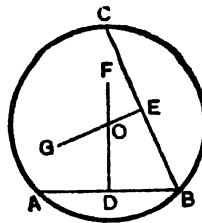
21. যদি কোন চতুর্ভুজের চারিটি কৌণিক বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা সম্ভব হয়, তবে ঐ চতুর্ভুজকে **বৃত্তস্থ** (Cyclic) **চতুর্ভুজ** বলে।

22. কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের প্রত্যেক কৌণিক বিন্দু একটি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত থাকিলে, ঋজুরেখ ক্ষেত্রটিকে ঐ বৃত্তের **অন্তর্লিখিত** (Inscribed) ঋজুরেখ ক্ষেত্র বলে এবং বৃত্তটিকে ঐ ঋজুরেখ ক্ষেত্রের **পরিলিখিত** (Circumscribed) বৃত্ত বলে।

23. কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহু একটি বৃত্তকে স্পর্শ করিলে, ঋজুরেখ ক্ষেত্রটিকে ঐ বৃত্তের **পরিলিখিত** (Circumscribed) ঋজুরেখ ক্ষেত্র বলে এবং বৃত্তটিকে ঐ ঋজুরেখ ক্ষেত্রের **অন্তর্লিখিত** (Inscribed) বৃত্ত বলে

উপপাদ্য 20

একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এরূপ তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

[One and only one circle can be drawn through three given points not in the same straight line.] (C. U. 1933 ; S. F. '52)

মনে কর, A, B ও C তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং উহারা একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, B ও C বিন্দু দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যাইতে পারে।

AB ও BC যোগ কর।

ABর মধ্যবিন্দু D হইতে ABর উপর DF এবং BCর মধ্যবিন্দু E হইতে BCর উপর EG লম্ব টান।

AB ও BC একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় বলিয়া DF ও EG সমান্তরাল নহে; সুতরাং উহারা পরস্পর ছেদ করিবে।

মনে কর যেন DF ও EG পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। ∵ DF, AB কে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে,

∴ DF এর যে কোন বিন্দু A ও B হইতে সমদূরবর্তী।

আবার, ∵ EG, BC কে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে,

∴ EGর যে কোন বিন্দু B ও C হইতে সমদূরবর্তী।

∴ DF ও EGর একমাত্র সাধারণ O বিন্দু A, B ও C হইতে সমদূরবর্তী।

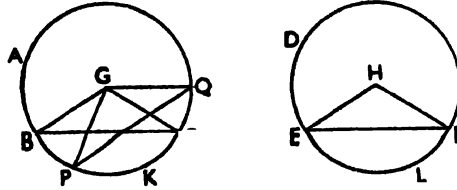
∴ O কে কেন্দ্র এবং OA কে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা A, B ও C দিয়া যাইবে।

∵ O ব্যতীত অপর কোন বিন্দু A, B ও C হইতে সমদূরবর্তী হইতে পারে না;

∴ A, B ও C দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

স্বতঃসিদ্ধ 1

সমান সমান বৃত্তে (অথবা, একই বৃত্তে) সমান সমান জ্যা সমান সমান চাপ ছিন্ন করে এবং কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

[In congruent circles (or, in the same circle) equal chords cut off equal arcs and subtend congruent angles at the centres.]

মনে কর, ABC ও DEF দুইটি সমান বৃত্তের G ও H যথাক্রমে কেন্দ্র, (1) BC জ্যা = EF জ্যা এবং উহাদের উপর অবস্থিত BGC ও EHF কেন্দ্রস্থ কোণ এবং (2) ABC বৃত্তের BC জ্যা ≐ PQ জ্যা এবং উহাদের উপর অবস্থিত BGC ও PGQ কেন্দ্রস্থ কোণ।

তাহা হইলে স্বতঃসিদ্ধটি অনুসারে, (1) অধিচাপ BAC = অধিচাপ EDF, উপচাপ BKC = উপচাপ ELF এবং ∠BGC = ∠EHF

এবং (2) অধিচাপ BAC = অধিচাপ PAQ, উপচাপ BKC = উপচাপ PKQ এবং ∠BGC = ∠PGQ।

স্বতঃসিদ্ধ 2

(স্বতঃসিদ্ধ 1 এর বিপরীত)

সমান সমান বৃত্তে (অথবা, একই বৃত্তে) সমান সমান চাপের জ্যাগুলি পরস্পর সমান এবং যে সকল জ্যা কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাহারা পরস্পর সমান।

[In equal circles (or, in the same circle), chords which cut off equal arcs or subtend equal angles at the centres are congruent.]

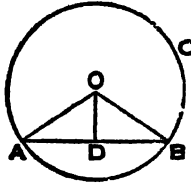
উপরের চিত্রে, ABC ও DEF দুইটি সমান বৃত্তের G ও H যথাক্রমে কেন্দ্র, (1) BKC চাপ = ELF চাপ এবং BC ও EF জ্যাদ্বয়ের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ ∠BGC = কেন্দ্রস্থ ∠EHF এবং (2) ABC বৃত্তের BKC চাপ = PKQ চাপ এবং BC ও PQ জ্যাদ্বয়ের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ ∠BGC = কেন্দ্রস্থ ∠PGQ। তাহা হইলে স্বতঃসিদ্ধটি অনুসারে, (1) BC জ্যা = EF জ্যা এবং (2) BC জ্যা = PQ জ্যা।

উপপাদ্য 21

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত কোন সরলরেখা যদি ব্যাস ভিন্ন অপর কোন জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে উহা ঐ জ্যার উপর লম্ব হইবে।

বিপরীতক্রমে, বৃত্তের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত কোন সরলরেখা যদি ব্যাস ভিন্ন অপর কোন জ্যার উপর লম্ব হয়, তবে উহা ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[A line, drawn from the centre of a circle to bisect a chord which is not a diameter, is at right angles to the chord. (S. F. '60)

Conversely, the perpendicular drawn from the centre of a circle to a chord, which is not a diameter, bisects the chord. Euc. III. 3.] (S. F. 1956, '57, '60, '71)

মনে কর, ABC বৃত্তের O কেন্দ্র এবং কেন্দ্রের বহিঃস্থ AB একটি জ্যা। O হইতে অঙ্কিত OD সরলরেখা AB কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OD, ABর উপর লম্ব। OA ও OB যোগ কর।

প্রমাণ। OAD ও OBD ত্রিভুজদ্বয়ের OD = OD,

OA = OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

এবং AD = BD ; (কল্পনা)

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। ∴ ∠ODA = ∠ODB।

কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকে সমকোণ, ∴ OD, ABর উপর লম্ব।

বিপরীতক্রমে, ABC বৃত্তের O কেন্দ্র এবং কেন্দ্রের বহিঃস্থ AB একটি জ্যা। O হইতে অঙ্কিত OD সরলরেখা ABর উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD = BD। OA ও OB যোগ কর।

প্রমাণ। OAD ও OBD সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

অতিভুজ OA = অতিভুজ OB এবং OD = OD ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। ∴ AD = BD।

অনুসিদ্ধান্ত। যে কোন জ্যার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

[কারণ, জ্যার লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহ ছাড়া অপর কোন বিন্দু জ্যার দুই প্রান্ত হইতে সমদূরবর্তী নহে।]

অনুশীলনী 11

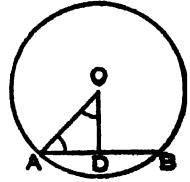
1. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে দুইএর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না। (S.F. 1952)

[কারণ, যদি উহারা দুইএর অধিক বিন্দুতে ছেদ করে, তবে উহাদের একই কেন্দ্র [illegible] ব্যাসার্ধ হইবে এবং বৃত্ত দুইটি একই বৃত্তে পরিণত হইবে।]

2. কোন বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন একটি জ্যা অঙ্কিত কর যেন বিন্দুটি ঐ জ্যার মধ্যবিন্দু হয়।

[উদ্দিষ্ট জ্যাটি নির্দিষ্ট বিন্দু ও কেন্দ্র সংযোজক সরলরেখার উপর লম্ব।]

3. কোন বৃত্তের এমন একটি জ্যা অঙ্কিত কর যেন উহার দৈর্ঘ্য, কেন্দ্র হইতে ঐ জ্যার দূরত্বের দ্বিগুণ হয়।

[ইঙ্গিত : O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের পরিধিতে A একটি বিন্দু লও। 45° পরিমিত $\angle OAB$ আঁক ; AB যেন বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে AB, উদ্দিষ্ট জ্যা হইবে। কারণ, ABর মধ্যবিন্দু D হইলে OD যোগ করিলে AOD একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে ; $\therefore$ AB = 2AD = 2OD।]

4. এককেন্দ্রীয় দুইটি বৃত্তকে কোন সরলরেখা ছেদ করিলে বৃত্তদ্বয়ের অন্তর্গত ঐ রেখাটির অংশদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

[কেন্দ্র হইতে সরলরেখাটির উপর লম্ব টানিয়া উপ. 21 এর দ্বিতীয় অংশের সাহায্যে প্রমাণ কর।]

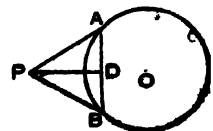
5. কোন বৃত্তের দুইটি জ্যার মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা যদি একটির উপর লম্ব হয়, তবে উহা অপরটির উপরও লম্ব হইবে।

[ইঙ্গিত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD দুইটি জ্যা এবং E ও F যথাক্রমে উহাদের মধ্যবিন্দু এবং EF, ABর উপর লম্ব। এখন, EF, ABর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক বলিয়া O, EF এর উপর অবস্থিত (অনুসি., উপ. 21)। আবার, F, CDর মধ্যবিন্দু বলিয়া OF বা EF, CDর উপর লম্ব (উপ. 21)।]

6. কোন বৃত্তের OB ব্যাসার্ধের সহিত সমান কোণ করিয়া BA ও BD দুইটি জ্যা অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে, জ্যা দুইটি সমান এবং কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

[O হইতে BA ও BDর উপর লম্ব টানিয়া উপ. 21 এর সাহায্যে প্রমাণ কর।]

7. একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত দুইটি সমান সরলরেখা টানা হইল। প্রমাণ কর যে, সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডক ঐ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

[ইঙ্গিত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু P হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত PA = PB এবং $\angle APB$র সমদ্বিখণ্ডক PD, AB জ্যাকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন, $\triangle APD \cong \triangle BPD$; $\therefore$ AD = BD এবং $\angle PDA = \angle PDB$; কিন্তু উহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকে সমকোণ।

$\therefore$ PD, AB জ্যার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক ; $\therefore$ বর্ধিত PD বৃত্তটির কেন্দ্র দিয়া যাইবে (অনুসি., উপ. 21)।]

i8. দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে উহাদের সাধারণ জ্যার মধ্যবিন্দু এবং কেন্দ্রদ্বয় একই সরলরেখায় থাকিবে।

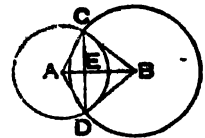
[সাধারণ জ্যার মধ্যবিন্দু এবং কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখাদ্বয় সাধারণ জ্যার উপর বিপরীত পার্শ্বে একই বিন্দুতে লম্ব (উপ. 21)। সুতরাং সরলরেখাদ্বয় একই সরলরেখা।]

i9. দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখা সাধারণ জ্যাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[ইঙ্গিত : A ও B কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং উহাদের সাধারণ জ্যা CD ও কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখা AB পরস্পরকে E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

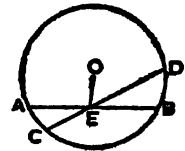
AC, AD, BC, BD যোগ কর। এখন,

$\triangle ACB \cong \triangle ADB$। ∴ $\angle CAE = \angle DAE$

∴ $\triangle CAE \cong \triangle DAE$। ∴ $CE = DE$ এবং

$\angle AEC = \angle AED$; কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকে সমকোণ।

∴ AB, সাধারণ জ্যা CD কে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]

10. কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা কেন্দ্র ছাড়া অপর কোন বিন্দুতে পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে পারে না। (C. U. 1859, 1918)

[ইঙ্গিত : যদি সম্ভব হয়, তবে মনে কর যেন O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD জ্যা পরস্পরকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। OE যোগ কর। তাহা হইলে, OE উভয় সরলরেখার উপর লম্ব (উপ. 21) হইবে বলিয়া, $\angle OEB = \angle OED$, কিন্তু $\angle OEB$ উহার অংশ $\angle OED$র সমান হইতে পারে না।

∴ কেন্দ্র ছাড়া অপর কোন বিন্দুতে বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে পারে না।]

11. কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যার মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা বৃত্তটির কেন্দ্র দিয়া যাইবে। (B. U. 1909)

[ইঙ্গিত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD দুইটি সমান্তরাল জ্যা এবং E, ABর মধ্যবিন্দু। EO যোগ করিয়া বর্ধিত কর ; উহা যেন CD কে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। $\angle OEA = 1$ সমকোণ (উপ. 21) এবং

∵ AB ∥ CD, ∴ $\angle OEA + \angle OFC = 2$ সমকোণ।

∴ $\angle OFC = 1$ সমকোণ, ∵ F, CDর মধ্যবিন্দু।

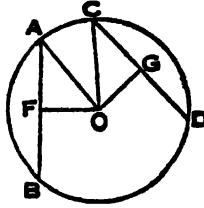
∴ AB ও CD সমান্তরাল জ্যাদ্বয়ের মধ্যবিন্দু E এবং F এর সংযোজক সরলরেখা EF, কেন্দ্র O দিয়া যাইবে।]

উপপাদ্য 22

কোন বৃত্তের সমান সমান জ্যাগুলি কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

বিপরীতক্রমে, কোন বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী জ্যাগুলি পরস্পর সমান।

[Equal chords of a circle are equidistant from the centre. (S. F. 1962, '67, '71)

Conversely, chords which are equidistant from the centre are equal. Euc. III. 14.] (S. F. 1954, '62, '66, '73)

মনে কর, একটি বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AB ও CD দুইটি সমান জ্যা। O হইতে AB ও CD-র উপর যথাক্রমে OF ও OG দুইটি লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OF = OG। OA ও OC যোগ কর।

প্রমাণ। ∵ OF, AB জ্যার উপর লম্ব,

∴ OF, AB কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, (উপ. 21)

∴ $AF = \frac{1}{2}AB$। এইরূপ, $CG = \frac{1}{2}CD$।

কিন্তু AB = CD (কল্পনা), ∴ AF = CG।

∴ AFO ও CGO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের AF = CG, (প্রমাণিত)

অতিভুজ AO = অতিভুজ CO, (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ OF = OG।

বিপরীতক্রমে, মনে কর, একটি বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AB ও CD দুইটি জ্যা। O হইতে AB ও CD-র উপর অঙ্কিত OF ও OG লম্বদ্বয় পরস্পর সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB = CD। OA ও OC যোগ কর।

প্রমাণ। ∵ OF, AB-র উপর লম্ব,

∴ OF, AB কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, (উপ. 21)

∴ $AF = \frac{1}{2}AB$। এইরূপ, $CG = \frac{1}{2}CD$।

এখন, AFO ও CGO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের OF = OG (কল্পনা)

এবং অতিভুজ AO = অতিভুজ CO, (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। AF = CG ; ∴ AB = CD

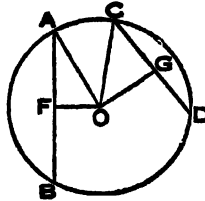
অনুসিদ্ধান্ত। সমান সমান বৃত্তের সমান সমান জ্যা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।
[একটি বৃত্তকে অপরটির উপর সমাপতিত করিয়া প্রমাণ কর।] (S. F. 1962)

উপপাদ্য 23

বৃত্তের দুইটি জ্যার মধ্যে কেন্দ্রের অধিকতর নিকটবর্তী জ্যাটি অপেক্ষাকৃত দূরবর্তী জ্যাটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিপরীতক্রমে, দুইটি জ্যার মধ্যে বৃহত্তরটি ক্ষুদ্রতরটি অপেক্ষা কেন্দ্রের অধিকতর নিকটবর্তী।

[Of any two chords of a circle, that which is nearer to the centre is greater than one more remote.

Conversely, the greater of two chords of a circle is nearer to the centre than the less. Euc. III. 15.]

মনে কর, একটি বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AB ও CD দুইটি জ্যা। O হইতে AB ও CDর উপর যথাক্রমে OF ও OG দুইটি লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(1) $OF < OG$ হইলে, $AB > CD$;

(2) $AB > CD$ হইলে, $OF < OG$।

OA ও OC যোগ কর।

প্রমাণ। ∵ OF, ABর উপর লম্ব, ∴ OF, AB কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

∴ $AF = \frac{1}{2}AB$। এইরূপ, $CG = \frac{1}{2}CD$।

এখন, AFO ত্রিভুজের $\angle AFO = 1$ সমকোণ, ∴ $AO^2 = AF^2 + OF^2$।

আবার, CGO ত্রিভুজের $\angle CGO = 1$ সমকোণ, ∴ $CO^2 = CG^2 + OG^2$।

কিন্তু $AO = CO$ বলিয়া, $AO^2 = CO^2$; ∴ $AF^2 + OF^2 = CG^2 + OG^2$।

(1) $OF < OG$ হইলে $OF^2 < OG^2$;

∴ $AF^2 > CG^2$; ∴ $AF > CG$; ∴ $AB > CD$।

এবং (2) $AB > CD$ হইলে $AF > CG$;

∴ $AF^2 > CG^2$; ∴ $OF^2 < OG^2$; ∴ $OF < OG$।

অনুসিদ্ধান্ত। ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।

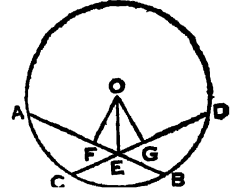
24. কোন ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে ত্রিভুজটির **পরিবৃত্ত** (Circum-circle) বলে এবং ঐ বৃত্তের কেন্দ্রকে ত্রিভুজটির **পরিকেন্দ্র** (Circum-centre) ও ব্যাসার্ধকে উহার **পরিব্যাসার্ধ** (Circum-radius) বলে।

25. যে বৃত্ত কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটিকে স্পর্শ করে, তাহাকে ত্রিভুজটির **অন্তর্বৃত্ত** (In-circle) বলে এবং ঐ বৃত্তের কেন্দ্রকে ত্রিভুজটির **অন্তঃকেন্দ্র** (In-centre) ও ব্যাসার্ধকে উহার **অন্তর্ব্যাসার্ধ** (In-radius) বলে।

26. যে বৃত্ত কোন ত্রিভুজের এক বাহুকে এবং অপর বাহু দুইটির বর্ধিত অংশকে স্পর্শ করে, তাহাকে ত্রিভুজটির **বহির্বৃত্ত** (Ex-circle) বলে এবং ঐ বৃত্তের কেন্দ্রকে ত্রিভুজটির **বহিঃকেন্দ্র** (Ex-centre) ও ব্যাসার্ধকে উহার **বহির্ব্যাসার্ধ** (Ex-radius) বলে। প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বহির্বৃত্ত থাকে।

অনুশীলনী 12

1. যদি কোন বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পর ছেদ করে, তবে একটির দুই অংশ যথাক্রমে অপরটির দুই অংশের সমান হইবে। (S. F. 1966)

[O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ABর উপর OF এবং CDর উপর OG লম্ব টান। OE যোগ কর।

প্রমাণ। OFE ও OGE সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ OE = অতিভুজ OE এবং OF = OG (উপ. 22),

∴ FE = GE।

আবার, $AF = \frac{1}{2}AB$ এবং $DG = \frac{1}{2}CD$ (উপ. 21);

∴ AF = DG (∵ AB = CD);

∴ AF + FE = DG + GE, অর্থাৎ AE = DE।

আবার, AB = CD (কল্পনা) এবং AE = DE (প্রমাণিত),

∴ EB = EC।]

2. যদি কোন বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা বৃত্তের বাহিরে পরস্পর ছেদ করে, তবে বৃত্তের বাহিরের অংশ দুইটি সমান হইবে। (S. F. 1962)

[প্রশ্ন 1 এর প্রমাণ দেখ।]

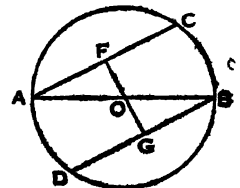
3. যদি কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পর ছেদ করে এবং যদি ছেদবিন্দু ও কেন্দ্র সংযোজক সরলরেখার সহিত উহারা সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে জ্যাদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

[প্রশ্ন 1 এর ন্যায় অঙ্কন কর।

প্রমাণ। △OFE ≡ △OGE (স্বতঃসিদ্ধ);

∴ OF = OG, ∴ AB = CD (উপ. 22)।]

4. ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে অঙ্কিত দুইটি সমান্তরাল জ্যা পরস্পর সমান।

O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB একটি ব্যাস এবং AC ও BD দুইটি সমান্তরাল জ্যা। AC ও BDর উপর যথাক্রমে OF ও OG লম্ব টান।

প্রমাণ। OAF ও OBG ত্রিভুজদ্বয়ের ∠OAF = একান্তর ∠OBG, ∠OFA = ∠OGB (∵ প্রত্যেকে সমকোণ) এবং OA = OB,

∴ OF = OG (স্বতঃসিদ্ধ); ∴ AC = BD (উপ. 22)

5. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB একটি ব্যাস। AC ও BD দুইটি সমান জ্যা, ABর দুই পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, AC ∥ BD।

[প্রশ্ন 4 এর ন্যায় অঙ্কন কর।

প্রমাণ। $\triangle OAF \equiv \triangle OBG$, ∴ $\angle OAF = \angle OBG$; ∴ AC ∥ BD।]

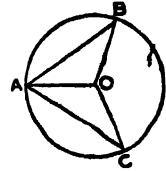
6. কোন বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AB ও AC দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ কর যে, OA, $\angle BAC$র সমদ্বিখণ্ডক।

OB ও OC যোগ কর।

প্রমাণ। ABO এবং ACO ত্রিভুজদ্বয়ের AB = AC (কল্পনা), AO = AO এবং OB = OC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

∴ $\triangle ABO \equiv \triangle ACO$

∴ $\angle BAO = \angle CAO$,

∴ AO, $\angle BAC$র সমদ্বিখণ্ডক।

7. কোন বৃত্তের AB ও AC দুইটি সমান জ্যা প্রমাণ কর যে, $\angle BAC$র সমদ্বিখণ্ডক বৃত্তটির কেন্দ্র O দিয়া যাইবে। (S. F. 1971)

প্রশ্ন 6 এর চিত্রে O যেন বৃত্তটির কেন্দ্র। OA, OB, OC যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AO, $\angle BAC$র সমদ্বিখণ্ডক।

প্রমাণ। $\triangle ABO \equiv \triangle ACO$,

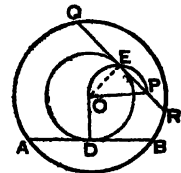
∴ $\angle OAB = \angle OAC$; ∴ AO, $\angle BAC$র সমদ্বিখণ্ডক।

∴ প্রমাণিত হইল।

8. একটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু দিয়া এমন দুইটি সমান জ্যা অঙ্কিত কর যেন উহাদের অন্তর্গত কোণ 60° হয়।

[প্রশ্ন 3 এর সাহায্যে অঙ্কন কর।]

9. একটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া বৃত্তটির একটি জ্যার সমান করিয়া আর একটি জ্যা অঙ্কিত কর।

O কেন্দ্রীয় বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ P একটি বিন্দু এবং AB বৃত্তটির একটি জ্যা। ABর উপর OD লম্ব টান। O কে কেন্দ্র করিয়া এবং OD ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। OP যোগ কর। OP কে ব্যাস লইয়া একটি অর্ধবৃত্ত আঁক। উহা যেন OD ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। E ও P দিয়া QR জ্যা আঁক। উহাই উদ্দিষ্ট জ্যা হইবে। OE যোগ কর। এখন, ∵ অর্ধবৃত্তস্থ $\angle OEP = 1$ সমকোণ, ∴ OE, QR এর উপর লম্ব এবং OE = OD (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) ; P দিয়া অঙ্কিত QR = AB।

10. একটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া (1) বৃহত্তম ও (2) ক্ষুদ্রতম জ্যাদ্বয় অঙ্কিত কর। (C. U. 1935, '42)

[(1) ঐ বিন্দু দিয়া অঙ্কিত ব্যাস বৃহত্তম জ্যা এবং (2) ঐ বিন্দু দিয়া ঐ ব্যাসের সহিত সমকোণ করিয়া অঙ্কিত জ্যা ক্ষুদ্রতম (উপ. 23.)।]

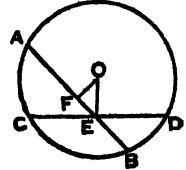
11. একটি জ্যা অপর একটি জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে প্রথমোক্ত জ্যাটি শেষোক্ত জ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB জ্যা CD জ্যাকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। ABর উপর OF লম্ব টান। OE যোগ কর। তাহা হইলে E, CDর মধ্যবিন্দু বলিয়া OE, CDর উপর লম্ব (উপ. 21)।

প্রমাণ। OFE ত্রিভুজের $\angle OFE$ সমকোণ ;

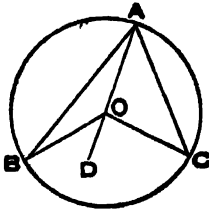
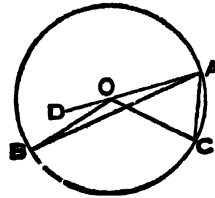
$\therefore$ $\angle OEF$ সূক্ষ্মকোণ। $\therefore$ $OF < OE$;

$\therefore$ AB, CD অপেক্ষা কেন্দ্রের অধিকতর নিকটবর্তী ,

$\therefore$ $AB > CD$ (উপ. 23)।

উপপাদ্য 24

বৃত্তের একই চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধির বাকি অংশের যে কোন বিন্দুস্থ কোণের দ্বিগুণ।

[The angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtends at any point on the remaining part of the circumference. Euc. III. 20.]

(S. F. 1953, '54, '56, '57, '59, '62, '64, '68, '70, '72)

প্রথম চিত্র

দ্বিতীয় চিত্র

মনে কর, ABC বৃত্তের O কেন্দ্র এবং BC চাপের উপর অবস্থিত BOC কেন্দ্রস্থ কোণ এবং BAC পরিধিস্থ কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle BOC = 2\angle BAC$।

AO যোগ করিয়া D পর্যন্ত বর্ধিত কর।

প্রমাণ। $\because$ OAB ত্রিভুজের $OA = OB$, (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

$\therefore$ $\angle OAB = \angle OBA$

কিন্তু বহিঃ $\angle BOD = \angle OAB + \angle OBA$,

$\therefore$ $\angle BOD = 2\angle OAB$ ।

এইরূপ, $\angle COD = 2\angle OAC$ ।

$\therefore$ প্রথম চিত্রে, $\angle BOD + \angle COD = 2(\angle OAB + \angle OAC)$,

$\therefore$ $\angle BOC = 2\angle BAC$

এবং দ্বিতীয় চিত্রে, $\angle BOD \sim \angle COD = 2(\angle OAB \sim \angle OAC)$,

$\therefore$ $\angle BOC = 2\angle BAC$ ।

দ্রষ্টব্য। BC চাপটি বৃত্তটির অর্ধপরিধির সমান হইলে BOC এক সরলকোণ হইবে, আর BC চাপটি বৃত্তটির অর্ধপরিধি অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে BOC একটি প্রবৃদ্ধকোণ হইবে। প্রত্যেক স্থলে একটিমাত্র চিত্র হইবে এবং উপ. 24 এর প্রথম চিত্রের প্রমাণ প্রযোজ্য হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত। বৃত্তের একই (বা সমান সমান) চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণগুলি সমান। কারণ, উহারা প্রত্যেকে কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক।

অনুশীলনী 13

1. ABC ত্রিভুজের ∠A সমকোণ এবং O পরিকেন্দ্র। প্রমাণ কর যে, B, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

2. ABC ত্রিভুজের O পরিকেন্দ্র। প্রমাণ কর যে,

∠BAC + ∠OBC = 1 সমকোণ।

[BO কে বর্ধিত কর ; উহা যেন পরিবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, ∠BAC + ∠OBC = ½(∠BOC + ∠COD)

= ½ সরল ∠BOD = 1 সমকোণ।]

চান বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তটির অন্তঃস্থ E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ কর যে, ∠AOC + ∠BOD = 2∠AEC।

(C. U. 1938 ; S. F. 1953, '61, '63, '65)

[BC যোগ কর।

∠AOC + ∠BOD = 2∠ABC + 2∠BCD
= 2(∠EBC + ∠BCE)
= 2∠AEC।]

4. কোন বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তটির বহিঃস্থ E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, ∠AOC ~ ∠BOD = 2∠AEC। (S. F. 1956, '68)

[BC যোগ কর।

∠AOC ~ ∠BOD = 2∠ABC ~ 2∠BCD

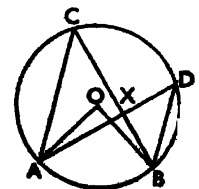
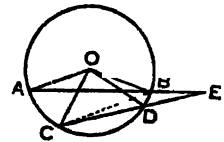
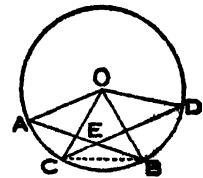
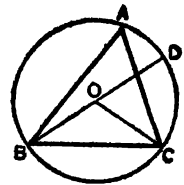
= 2(∠ABC ~ ∠BCE) = 2∠AEC।]

5. একটি বৃত্তের OA ও OB দুইটি ব্যাসার্ধ সমকোণে অবস্থিত। A ও B হইতে AC ও BD দুইটি সমান্তরাল জ্যা। প্রমাণ কর যে, AD ও BC পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে।

[মনে কর, AD ও BC, X বিন্দুতে ছেদ করে।

∠ADB = ½∠AOB = 45° ; এইরূপ, ∠ACB = 45°।

∴ ∠CBD = একান্তর ∠ACB = 45°।

∴ ∠BXD = 180° − ∠ADB − ∠CBD
= 180° − 45° − 45° = 90°।]

6. দুইটি সমান বৃত্ত পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করে এবং উহাদের প্রত্যেকটি অপরটির কেন্দ্র দিয়া যায়। A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত কোন সরলরেখা যদি বৃত্তদ্বয়কে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, $\triangle BCD$ সমবাহু।

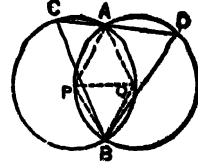
[মনে কর, P ও Q বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র।

প্রমাণ। APQ ও BPQ ত্রিভুজদ্বয় সমবাহু ;

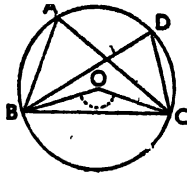
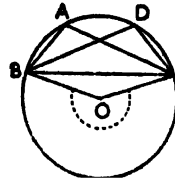
∴ উহাদের প্রত্যেক কোণ 60°।

∴ পরিধিস্থ $\angle ACB = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle APB = 60^\circ$।

এইরূপ, $\angle ADB = \frac{1}{2} \angle AQB = 60^\circ$।

∴ $\triangle BCD$ সমবাহু।]

উপপাদ্য 25

একই বৃত্তাংশস্থ যাবতীয় কোণ পরস্পর সমান।

[Angles in the same segment of a circle are congruent. Euc. III. 21.] (C. U. 1911, '14, '21, '42, '51 ; S. F. 1961, '65)

প্রথম চিত্র

দ্বিতীয় চিত্র

মনে কর, একটি বৃত্তের O কেন্দ্র এবং উহার BADC বৃত্তাংশস্থ BAC ও BDC দুইটি কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle BAC = \angle BDC$।

OB ও OC যোগ কর।

প্রমাণ। যেহেতু, কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$ এবং পরিধিস্থ $\angle BAC$ একই BC চাপের উপর অবস্থিত ;

∴ $\angle BOC = 2\angle BAC$। (উপ. 24)

এইরূপ, $\angle BOC = 2\angle BDC$।

∴ $\angle BAC = \angle BDC$।

টীকা। প্রথম চিত্রে বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর ও BOC কোণটি স্থূল এবং দ্বিতীয় চিত্রে বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ও BOC কোণটি প্রবৃদ্ধ। যদি বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্তের সমান হয়, তবে BOC কোণটি সরলকোণ হইবে এবং এস্থলেও উল্লিখিত প্রমাণ প্রযোজ্য হইবে।

অনুশীলনী 14

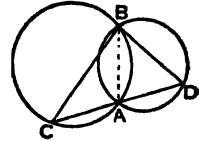
1. কোন বৃত্তের AB একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং এই জ্যা দ্বারা ছিন্ন একটি চাপের উপর P যে কোন বিন্দু। প্রমাণ কর যে, PAB ও PBA কোণদ্বয়ের সমষ্টি নিয়ত সমান। (S. F. 1957)

2. দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। A বিন্দু দিয়া বৃত্তদ্বয়ের পরিধি পর্যন্ত যে কোন সরলরেখা CAD টানা হইল। প্রমাণ কর যে, CBD কোণ নিয়ত সমান।

[AB যোগ কর। এখন, ACB চাপের উপর C-র যে কোন অবস্থানে ACB বৃত্তাংশস্থ ∠ACB নিয়ত সমান। এইরূপ,

ADB বৃত্তাংশস্থ ∠ADB নিয়ত সমান।

∴ ∠ACB + ∠ADB নিয়ত সমান।

∴ $\angle CBD = 180^\circ - (\angle ACB + \angle ADB)$ বলিয়া,
∠CBD নিয়ত সমান।]

3. দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। A বিন্দু দিয়া বৃত্তদ্বয়ের পরিধি পর্যন্ত CAD ও EAF সরলরেখাদ্বয় টানা হইল। প্রমাণ কর যে,

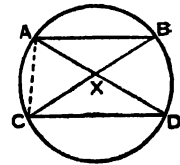
$\angle CBE = \angle DBF$। (S. F. 1959, '64)

[ইঙ্গিত : $\angle CBE = \angle CAE = \angle DAF = \angle DBF$।]

4. একটি বৃত্তের AB ও CD দুইটি জ্যা X বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, AXC ও DXB ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

5. একটি বৃত্তের AB ও CD দুইটি সমান্তরাল জ্যা। বৃত্তটির অভ্যন্তরস্থ X বিন্দুতে AD ও BC ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, AX = BX।

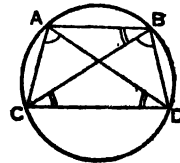
[AC যোগ কর। এখন, ∵ AB ∥ CD, ∴ ∠BAX = একান্তর ∠ADC। আবার, AC জ্যার উপর অবস্থিত ABDC বৃত্তাংশস্থ ∠ADC = ∠ABX। ∴ ∠BAX = ∠ABX,

∴ AX = BX।]

6. একটি বৃত্তের AB ও CD দুইটি সমান্তরাল জ্যা। প্রমাণ কর যে, ACD ও BCD ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

[CD জ্যার উপর অবস্থিত CABD বৃত্তাংশস্থ ∠CAD = ∠CBD।

আবার, AC জ্যার উপর অবস্থিত ABDC বৃত্তাংশস্থ ∠ADC = ∠ABC = একান্তর ∠BCD (∵ AB ∥ CD)।

∴ CAD ও CBD ত্রিভুজদ্বয়ের ∠CAD = ∠CBD, ∠ADC = ∠BCD এবং CD = CD ;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।]

7. বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়মের অসমান্তরাল বাহুদ্বয় সমান এবং কর্ণদ্বয় সমান।
(S. F. 1958)

[প্রশ্ন 6 এর চিত্রে বৃত্তস্থ ACDB ট্রাপিজিয়মের AB ∥ CD। AD, BC যোগ কর। এখন, △CAD ≡ △CBD (প্রশ্ন 6) ; ∴ AC = BD এবং AD = BC।]

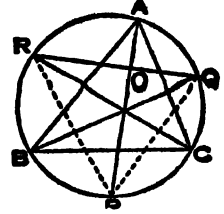
8. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB=BC। প্রমাণ কর যে,

$\angle ADB = \angle BDC$।

[কারণ, উহারা দুইটি সমান বৃত্তাংশস্থ কোণ।]

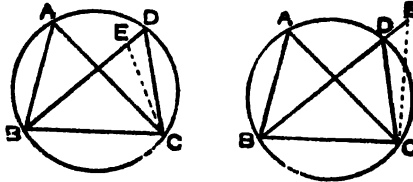
9. একটি বৃত্তের উপর A, B ও C তিনটি বিন্দু। $\angle BAC$, $\angle ABC$ ও $\angle ACB$র সমদ্বিখণ্ডকত্রয় বৃত্তের সহিত যথাক্রমে P, Q ও R বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, QR, APর উপর লম্ব। (B. U. 1923)

[PQ ও PR যোগ কর; QR যেন AP কে O বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন,

$\angle AOR = \angle OPR + \angle ORP$
$= \angle APR + \angle CRP + \angle CRQ$
$= \angle ACR + \angle CAP + \angle CBQ$
$= \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC$
$= 90°$। $\therefore$ $QR \perp AP$।]

উপপাদ্য 26

(উপপাদ্য 25 এর বিপরীত)

যদি দুই বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত অপর দুই বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে বিন্দু চারিটি একবৃত্তস্থ হইবে।

[If the line joining two points subtends congruent angles at two other points on the same side of it, the four points lie on a circle.] (C. U. 1941 ; S. F. 1961, '74)

মনে কর, B ও C বিন্দুর সংযোজক BC সরলরেখা উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত A ও D বিন্দুতে BAC ও BDC দুইটি সমান কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, B, C ও D একবৃত্তস্থ।

A, B ও C বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত যদি D বিন্দু দিয়া না যায়, তবে মনে কর যেন উহা BD কে অথবা বর্ধিত BD কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

EC যোগ কর।

প্রমাণ। $\angle BAC$ = একই বৃত্তাংশস্থ $\angle BEC$। (উপ. 25)

কিন্তু, $\angle BAC = \angle BDC$; (কল্পনা)

$\therefore$ $\angle BEC = \angle BDC$।

কিন্তু D নির্দিষ্ট ; সুতরাং E, Dর সহিত মিলিত না হইলে কোণ দুইটি সমান হওয়া অসম্ভব ;

∴ A, B ও C দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত D দিয়াও যাইবে ;

∴ A, B, C ও D একবৃত্তস্থ।

মন্তব্য। উপপাদ্য 26 এর সাধারণ নির্বচন নিম্নলিখিত রূপ হইতে পারে :

একই ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত সমান সমান কোণসমূহের শীর্ষবিন্দুগুলি একবৃত্তস্থ হইবে এবং ভূমিটি বৃত্তটির একটি জ্যা হইবে।

অনুশীলনী 15

1. AB ও CD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি AO = CO এবং BO = DO হয়, তবে প্রমাণ কর যে, A, B, C ও D একবৃত্তস্থ।

[AC ও BD যোগ কর। এখন, ত্রিভুজ AOC ও BODর $\angle AOC = \angle BOD$;

∴ $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$;

কিন্তু $\angle A = \angle C$ এবং $\angle B = \angle D$;

∴ BCর একই পার্শ্বস্থ $\angle A = \angle D$; ∴ A, B, C ও D একবৃত্তস্থ।]

2. ABC ত্রিভুজের AD ও BE বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে,

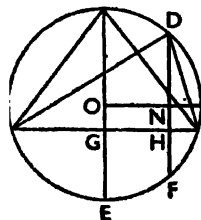
$\angle BAD = \angle BED$।

[কারণ, $\angle AEB = \angle ADB$ বলিয়া A, B, D ও E একবৃত্তস্থ।]

3. একই ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত সমান সমান কোণসমূহের শীর্ষবিন্দুগুলি একবৃত্তস্থ এবং ভূমিটি বৃত্তটির একটি জ্যা। (C. U. 1911, '21, '41)

4. একই ভূমির উপর অবস্থিত এবং সমান শিরঃকোণবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির ভিতর সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তম। (C. U. 1941)

BC ভূমির উপর সমান শিরঃকোণবিশিষ্ট ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং DBC অপর যে কোনও ত্রিভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\triangle ABC > \triangle DBC$।

[∵ $\angle BAC = \angle BDC$, ∴ A, B, C, D একবৃত্তস্থ। বৃত্তটির কেন্দ্র যেন O। AE ব্যাস এবং AEর সমান্তরাল DF জ্যা আঁক ; উহারা যেন BC কে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করে। BCর সমান্তরাল OM ব্যাসার্ধ আঁক ; উহা যেন DF কে N বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ। ∵ AE ব্যাস > DF জ্যা, ∴ AO > DN।

আবার, ∵ OGHN একটি আয়ত, ∴ OG = NH ;

∴ AO + OG > DN + NH, ∴ AG > DH ;

∴ $\triangle ABC > \triangle DBC$।

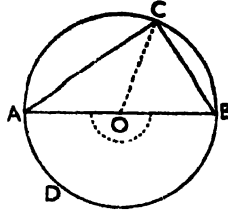
যদি D, CM চাপের উপর থাকে, তবে স্পষ্টতঃই AG > OG > DH ;

∴ $\triangle ABC > \triangle DBC$।]

উপপাদ্য 27

অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

[The angle in a semi-circle is a right angle. Euc. III. 31.]

(C. U. 1911, '17, '22, '27 ; S. F. 1958, '63, '69)

ADBC বৃত্তের O কেন্দ্র ও AB একটি ব্যাস এবং ∠ACB একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠ACB = 1 সমকোণ।

প্রথম প্রমাণ। ADB চাপের উপর অবস্থিত বলিয়া,

পরিধিস্থ ∠ACB = $\frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ ∠AOB ;

কিন্তু, ∠AOB = এক সরলকোণ = 2 সমকোণ,

∴ ∠ACB = 1 সমকোণ।

দ্বিতীয় প্রমাণ। OC যোগ কর।

∵ OA = OC, ∴ ∠OCA = ∠OAC

এবং ∵ OB = OC, ∴ ∠OCB = ∠OBC ;

∴ সমগ্র ∠ACB = ∠OAC + ∠OBC।

কিন্তু, ∠ACB + ∠OAC + ∠OBC = 2 সমকোণ।

∴ ∠ACB = 2 সমকোণের অর্ধেক = 1 সমকোণ।

মন্তব্য। এই উপপাদ্যটি উপপাদ্য 24 এর বিশেষ স্থল।

অনুসিদ্ধান্ত 1. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত অতিভুজটির বিপরীত শীর্ষ দিয়া যাইবে। (C. U. 1927)

ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ BC কে ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত যদি A দিয়া না যায়, তবে মনে কর যেন উহা BA (অথবা বর্ধিত BA) কে D বিন্দুতে ছেদ করে। CD যোগ কর।

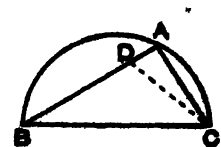
প্রমাণ। ∠BDC = 1 সমকোণ (∵ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ),

এবং ∠BAC = 1 সমকোণ (কল্পনা),

∴ ∠BDC = ∠BAC।

কিন্তু, A নির্দিষ্ট ; সুতরাং

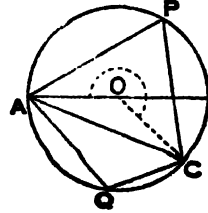
D, Aর সহিত মিলিত না হইলে উহা অসম্ভব।

∴ বৃত্তটি A দিয়া যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2. (1) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং (2) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। (S. F. 1963, '72)

[O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB একটি ব্যাস এবং AC জ্যা বৃত্তটিকে APC ও AQC দুইটি বৃত্তাংশে বিভক্ত করিয়াছে, যাহাদের APC > অর্ধবৃত্ত APB এবং AQC < অর্ধবৃত্ত AQB। OC যোগ কর। এখন,

(1) পরিধিস্থ $\angle APC = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$ কিন্তু $\frac{1}{2}\angle AOC < \frac{1}{2}$ সরলকোণ $\angle AOB$ বা <1 সমকোণ ;

$\therefore\ \angle APC < 1$ সমকোণ।

আবার, (2) পরিধিস্থ $\angle AQC = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC$

কিন্তু $\frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC > \frac{1}{2}$ সরলকোণ AOB বা > 1 সমকোণ ;

$\therefore\ \angle AQC > 1$ সমকোণ।]

অনুশীলনী 16

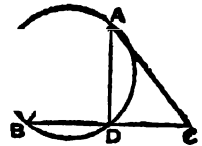
1. দুইটি বৃত্তের A ও B দুইটি ছেদবিন্দু এবং AC ও AD উহাদের দুইটি ব্যাস। প্রমাণ কর যে, C, B ও D একই সরলরেখায় অবস্থিত। (S. F. 1970)

[কারণ, BA, BC ও BD যোগ করিলে উৎপন্ন B বিন্দুস্থ কোণদ্বয় সমকোণ।]

2. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের একটিকে ব্যাস লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

[ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC। AB কে ব্যাস লইয়া একটি বৃত্ত আঁক ; উহা যেন BC কে D বিন্দুতে ছেদ করিল। AD যোগ কর। এখন, $\because$ অর্ধবৃত্তস্থ $\angle ADB = 1$ সমকোণ, $\therefore$ সন্নিহিত $\angle ADC = 1$ সমকোণ ;

$\therefore$ ABD ও ACD ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ;

$\therefore$ BD = CD, অর্থাৎ BC, D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।]

3. ত্রিভুজের দুই বাহুকে ব্যাস লইয়া দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহারা তৃতীয় বাহুকে অথবা বর্ধিত তৃতীয় বাহুকে একই বিন্দুতে ছেদ করিবে। (S. F. 1963)

[ABC ত্রিভুজের AB কে ব্যাস লইয়া একটি বৃত্ত আঁক (প্রশ্ন 2 এর চিত্র) ; উহা যেন BC কে D বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে ADB ত্রিভুজের $\angle ADB = 1$ সমকোণ ; $\therefore$ সন্নিহিত $\angle ADC = 1$ সমকোণ। $\therefore$ AC কে ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত BC কে একই D বিন্দুতে ছেদ করিবে (অনুসিদ্ধান্ত 1, উপ. 27)।]

4. কোন ত্রিভুজের একটি কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ও বহিঃসমদ্বিখণ্ডক ত্রিভুজটির পরিবৃত্তকে আবার P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। দেখাও যে, ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের PQ একটি ব্যাস।

[ABC ত্রিভুজের ∠Bর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক BP এবং বহিঃসমদ্বিখণ্ডক BQ, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। PQ যোগ কর। এখন,

∠PBQ = 1 সমকোণ ;

∴ PBQ একটি অর্ধবৃত্ত, যাহার PQ ব্যাস।

∴ PQ, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস।]

5. ত্রিভুজের একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক এবং উহার বিপরীত বাহুর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের উপর মিলিত হয়। (S. F. 1954)

[মনে কর, ABC ত্রিভুজের A কোণের সমদ্বিখণ্ডক ত্রিভুজটির পরিবৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে, ∠BAP = ∠CAP।

∴ PB চাপ = PC চাপ ; ∴ PB = PC।

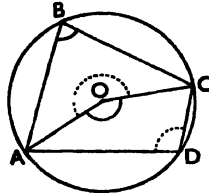
∴ BCর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক P দিয়া যাইবে। ∴ প্রমাণিত হইল।]

6. রম্বসের বা বর্গক্ষেত্রের চারিটি বাহুকে ব্যাস লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহারা একটি সাধারণ বিন্দু দিয়া যাইবে।

[রম্বস ও বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে।]

উপপাদ্য 28

বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ।

[The opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are supplementary.] (C.U. 1941, '50 , S.F. 1958, '61, '64, '68, '73)

মনে কর, একটি বৃত্তের O কেন্দ্র এবং ABCD ঐ বৃত্তস্থ একটি চতুর্ভুজ।
প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(1) ∠ABC + ∠ADC = 2 সমকোণ এবং (2) ∠BAD + ∠BCD = 2 সমকোণ।

OA ও OC যোগ কর।

প্রমাণ। ADC চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ ∠ABC = $\frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ ∠AOC এবং ABC চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ ∠ADC = $\frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ ∠AOC,

∴ ∠ABC + ∠ADC = $\frac{1}{2}$(∠AOC + প্রবৃদ্ধ ∠AOC)
= $\frac{1}{2}$ × 4 সমকোণ = 2 সমকোণ।

এইরূপ, ∠BAD + ∠BCD = 2 সমকোণ।

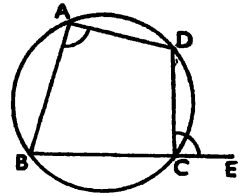
অনুসিদ্ধান্ত। কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের এক বাহু বর্ধিত হইলে উৎপন্ন বহিঃকোণ চতুর্ভুজটির বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হইবে।

বৃত্তস্থ ABCD চতুর্ভুজের BC বাহু E পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle DCE = \angle BAD$।

প্রমাণ। $\angle DCE + \angle BCD = 2$ সমকোণ।

আবার, $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ।

$\therefore \ \angle DCE = \angle BAD$।

অনুশীলনী 17

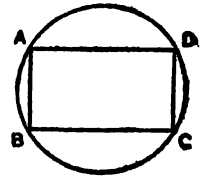
1. যদি কোন সামান্তরিকের একটি পরিবৃত্ত অঙ্কিত করা সম্ভবপর হয়, তবে সামান্তরিকটি একটি আয়তক্ষেত্র হইবে। (C. U. 1915, '20 ; D. B. 1942)

[মনে কর, ABCD একটি বৃত্তস্থ সামান্তরিক।

$\therefore \ \angle A + \angle C = 2$ সমকোণ

এবং $\angle A = \angle C$ (সামান্তরিকের বিপরীত কোণ) ;

$\therefore \ \angle A = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ ABCD একটি আয়তক্ষেত্র।]

2. বৃত্তে অন্তর্লিখিত ত্রিভুজের বহির্দিকের বৃত্তাংশ তিনটির তিন কোণের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান। (C. U. 1950)

[বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABC ত্রিভুজের বহির্দিকের বৃত্তাংশ তিনটির তিন কোণ D, E ও F। এখন, বৃত্তস্থ ABDC চতুর্ভুজের

$\angle BAC + \angle D = 2$ সমকোণ।

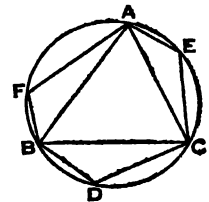
অনুরূপে, $\angle ABC + \angle E = 2$ সমকোণ

এবং $\angle ACB + \angle F = 2$ সমকোণ।

$\therefore$ যোগ করিয়া,

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB + \angle D + \angle E + \angle F$

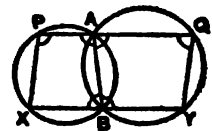
$= 6$ সমকোণ কিন্তু $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$

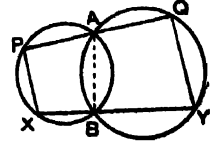
$= 2$ সমকোণ, $\therefore \ \angle D + \angle E + \angle F = 4$ সমকোণ।]

3. দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয় দিয়া উহাদের পরিধি পর্যন্ত দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা টানা হইল। প্রমাণ কর যে, (1) সমান্তরাল সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান এবং (2) একই দিকের প্রান্তবিন্দুসংযোজক সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান।

[ধর, A ও B ছেদবিন্দু এবং PAQ ও XBY সমান্তরাল রেখাদ্বয়। AB, PX, QY যোগ কর।

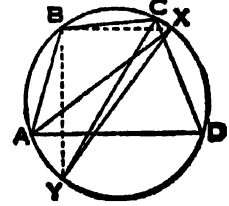
$\angle P + \angle Q = \angle ABY + \angle ABX$

$= 2$ সমকোণ। $\therefore$ PX ∥ QY।

PQYX একটি সামান্তরিক। $\therefore$ (1) PQ = XY এবং (2) PX = QY।]

4. দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয় দিয়া দুইটি সরলরেখা অঙ্কিত করায় উহারা একটি বৃত্তকে P ও X বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তটিকে Q ও Y বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, PX ও QY সমান্তরাল। (C. U. 1911 ; S. F. 1961)

[বৃত্ত দুইটি যেন পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। AB যোগ কর। এখন, বৃত্তস্থ APXB চতুর্ভুজের $\angle P$= বহিঃ $\angle ABY$ এবং বৃত্তস্থ AQYB চতুর্ভুজের $\angle Q$= বহিঃ $\angle ABX$।

$\therefore$ $\angle P + \angle Q = \angle ABY + \angle ABX = 2$ সমকোণ ; $\therefore$ $PX \parallel QY$।]

5. যদি কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় উহার পরিবৃত্তকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে, তবে XY ঐ বৃত্তের একটি ব্যাস হইবে।

[ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের A ও C কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরিবৃত্তকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিল। BX, BY ও XY যোগ কর।

প্রমাণ। $\angle BYX + \angle BXY$

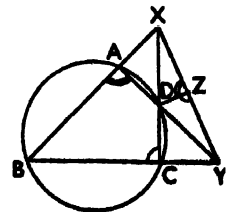
$= \angle BAX + \angle BCY$ (উপ. 25)

$= \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle BCD)$

$= \frac{1}{2}.2$ সমকোণ $= 1$ সমকোণ।

$\therefore$ $\angle YBX = 1$ সমকোণ,

$\therefore$ XY একটি ব্যাস।]

6. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। বর্ধিত BA ও CD, X বিন্দুতে এবং AD ও BC, Y বিন্দুতে ছেদ করে। ADX ও CDY ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্ত Z বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, X, Z ও Y একই সরলরেখায় অবস্থিত।

[XZ, YZ ও DZ যোগ কর।

এখন, $\because$ ADZX ও DZYC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ;

$\therefore$ $\angle DZX + \angle DZY = \angle DAB + \angle DCB$ (উপ. 28 এর অনুসিদ্ধান্ত)

$= 2$ সমকোণ ;

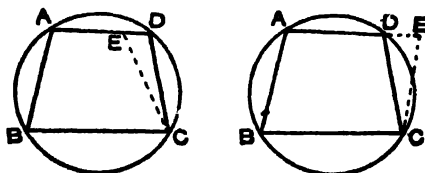
$\therefore$ X, Z ও Y একই সরলরেখায় অবস্থিত।]

উপপাদ্য 29

(উপপাদ্য 28 এর বিপরীত)

কোন চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হইলে উহা একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হইবে।

[If a pair of opposite angles of a quadrilateral are supplementary, the quadrilateral is cyclic.]

(C. U. 1943, '44, '49 ; S. F. 1954, '56)

ABCD চতুর্ভুজের $\angle B + \angle D = 2$ সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

A, B ও C বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত যদি D বিন্দু দিয়া না যায়, তবে মনে কর যেন উহা AD কে অথবা বর্ধিত AD কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

EC যোগ কর।

প্রমাণ। $\angle ABC + \angle AEC = 2$ সমকোণ ($\because$ ABCE একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ)

কিন্তু $\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ, (কল্পনা)

$\therefore \quad \angle AEC = \angle ADC$ ।

কিন্তু D বিন্দু নির্দিষ্ট ; সুতরাং E, D-র সহিত মিলিত না হইলে কোণ দুইটি সমান হওয়া অসম্ভব ; $\therefore$ A, B ও C বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত D দিয়াও যাইবে ;

$\therefore$ ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

অনুসিদ্ধান্ত। কোন চতুর্ভুজের এক বাহু বর্ধিত হইলে উৎপন্ন বহিঃকোণ যদি বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হয়, তবে উহা একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হইবে।

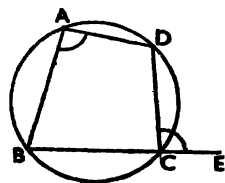
ABCD চতুর্ভুজের BC বাহু E পর্যন্ত বর্ধিত হওয়ায় $\angle DCE = \angle BAD$ হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ। $\angle BCD + \angle DCE = 2$ সমকোণ,

কিন্তু $\angle DCE = \angle BAD$ (কল্পনা)

$\therefore \quad \angle BCD + \angle BAD = 2$ সমকোণ।

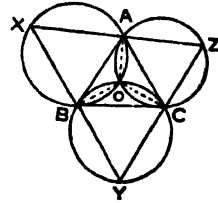
$\therefore$ ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

অনুশীলনী 18

1. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। BC ভূমির সহিত সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত XY সরলরেখা AB ও AC কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে B, C, X ও Y একবৃত্তস্থ। (A. U. 1931; S. F. 1956, '73)

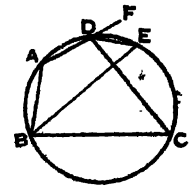
2. ABCD একটি সামান্তরিক। A ও B দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত AD ও BC কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে C, D, E ও F বৃত্তস্থ।

[কারণ, EF যোগ করিয়া, $\angle EFC + \angle D = \angle A + \angle D = 2$ সমকোণ।]

3. কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর বহির্দিকে তিনটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজ তিনটির পরিবৃত্তগুলি একই বিন্দুতে ছেদ করিবে। (C. U. 1923, '25; S. F. 1954)

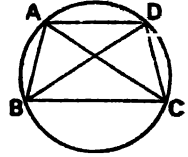
[ABC ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর বহির্দিকে AXB, BYC ও CZA তিনটি সমবাহু ত্রিভুজ। AXB ও BYC ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্ত দুইটি আঁক। উহারা যেন পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, CZA ত্রিভুজের পরিবৃত্ত O দিয়া যাইবে। OA, OB, OC যোগ কর। এখন, বৃত্তস্থ AXBO চতুর্ভুজের $\angle AXB = 60°$ ($\because$ $\triangle AXB$ সমবাহু), $\therefore$ $\angle AOB = 180° - 60° = 120°$ (উপ. 28)। অনুরূপে, $\angle BOC = 120°$। $\therefore$ $\angle COA = 360° - 120° - 120° = 120°$।

$\therefore$ CZAO চতুর্ভুজের $\angle COA + \angle CZA = 120° + 60° = 180°$, $\therefore$ CZAO একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ (উপ. 29); $\therefore$ CZA ত্রিভুজের পরিবৃত্ত O দিয়া যাইবে।]

4. বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যে কোন কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক এবং বিপরীত কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক বৃত্তের উপর ছেদ করে। (C. U. 1924; S. F. 1964)

[বৃত্তস্থ ABCD চতুর্ভুজের B কোণের সমদ্বিখণ্ডক যেন ABCD বৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। DE যোগ কর। প্রমাণ করিতে হইবে যে DE, ADC কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক। AD কে F পর্যন্ত বর্ধিত কর। এখন, ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AD বাহু F পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে; $\therefore$ বহিঃ $\angle CDF =$ বিপরীত অন্তঃ $\angle ABC$। আবার, ABED বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AD বাহু F পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে; $\therefore$ বহিঃ $\angle EDF =$ বিপরীত অন্তঃ $\angle ABE$। কিন্তু $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC$, $\therefore$ $\angle EDF = \frac{1}{2}\angle CDF$।

$\therefore$ DE, CDF কোণের সমদ্বিখণ্ডক; $\therefore$ DE, ADC কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক।]

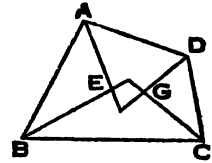
5. কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত দুই বাহু সমান্তরাল হইলে অপর দুই বাহু সমান হইবে এবং কর্ণদ্বয়ও সমান হইবে। (S. F. 1958)

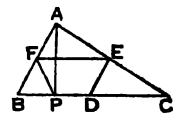
[ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AD ‖ BC। প্রমাণ করিতে হইবে, AB = CD এবং AC = BD। এখন, ∵ ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

∴ $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ। আবার,
∵ AD ‖ BC, ∴ $\angle BAD + \angle ABC = 2$ সমকোণ।
∴ $\angle ABC = \angle BCD$।

∴ ABC ও DBC ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle ABC = \angle BCD$, $\angle BAC =$ একবৃত্তাংশস্থ $\angle BDC$ এবং BC = BC। ∴ $\triangle ABC \equiv \triangle DBC$; ∴ AB = CD এবং AC = BD।]

6. চতুর্ভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ উৎপন্ন করে।

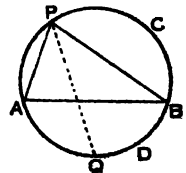
[ABCD চতুর্ভুজের কোণগুলিকে ∠A, ∠B, ∠C ও ∠D দ্বারা সূচিত করিলে, ∠A ও ∠Bর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় E বিন্দুতে এবং ∠C ও ∠Dর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

উৎপন্ন চতুর্ভুজের $\angle E + \angle G = \angle AEB + \angle DGC$
$= (180° - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B)$
$+ (180° - \frac{1}{2}\angle C - \frac{1}{2}\angle D)$
$= 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$
$= 360° - 180° = 2$ সমকোণ।
∴ উৎপন্ন চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।]

. .. ABC ত্রিভুজের BC, AC ও ABর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F। A হইতে বিপরীত বাহুর উপর পতিত লম্বের পাদবিন্দু P। প্রমাণ কর যে P, D, E, F একবৃত্তস্থ। (C. U. 1905, '43 ; S. F. 1961)

[APB সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ABর F মধ্যবিন্দু।
∴ FP = FB ; ∴ $\angle FPB = \angle FBP = \angle FED$,
কিন্তু $\angle FPB + \angle FPD = 2$ সমকোণ,
∴ $\angle FED + \angle FPD = 2$ সমকোণ ; ∴ P, D, E, F একবৃত্তস্থ।]

অনুশীলনী 19

(বিবিধ প্রশ্ন)

1. একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলির যাবতীয় সমদ্বিখণ্ডক কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে। (C. U. 1914, '51)

[ACB বৃত্তাংশস্থ APB কোণের সমদ্বিখণ্ডক PQ যেন ADB চাপকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন, ∵ $\angle APQ = \angle BPQ$, ∴ AQ চাপ = BQ চাপ, ∴ Q, ADB চাপের মধ্যবিন্দু। এইরূপ, ADB চাপ নির্দিষ্ট বলিয়া, ACB বৃত্তাংশস্থ যে কোনও কোণের সমদ্বিখণ্ডক ADB চাপের মধ্যবিন্দু Q দিয়া যাইবে। ∴ ACB বৃত্তাংশস্থ কোণগুলির যাবতীয় সমদ্বিখণ্ডক অনুবন্ধী বৃত্তাংশের ADB চাপের নির্দিষ্ট মধ্যবিন্দু Q দিয়া যাইবে।]

2. কোন বৃত্তের AB একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং P পরিধিস্থ যে কোন বিন্দু। প্রমাণ কর যে, APB কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক, দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর যে কোন একটি দিয়া যাইবে। [প্রশ্ন 1 এর প্রমাণ দেখ।] (C. U. 1923)

3. দুইটি ব্যাস যদি পরস্পর লম্ব হয়, তবে উহারা বৃত্তের পরিধিকে সমান চারি অংশে বিভক্ত করিবে।

[কারণ ব্যাসদ্বয় AB ও CD হইলে উহারা ACBD চতুর্ভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক হইবে।]

4. কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা সমান্তরাল হইলে উহাদের মধ্যবর্তী চাপ দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

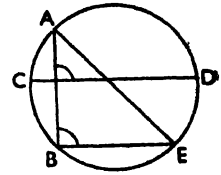
[AB ও CD সমান্তরাল জ্যা। BC যোগ কর।

এখন, ∠ABC = একান্তর ∠BCD ;

কিন্তু ইহারা পরিধিস্থ কোণ,

∴ AC চাপ = BD চাপ।]

5. কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরের উপর লম্ব। উহারা বৃত্তের পরিধিকে যে চারিটি চাপে বিভক্ত করে, তাহাদের যে কোন দুইটি একান্তর চাপের সমষ্টি অর্ধ-পরিধির সমান। (S. F. 1964)

[AB ও CD জ্যা পরস্পর লম্ব। CDর সমান্তরাল BE জ্যা টান। AE যোগ কর।

এখন, AC চাপ + DB চাপ = AC চাপ + DE চাপ + BE চাপ

= AC চাপ + CB চাপ (প্রশ্ন 4) + BE চাপ

= ACBE চাপ = অর্ধপরিধি (∵ B সমকোণ)।]

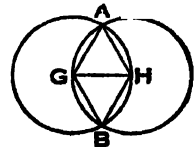
6. যদি দুইটি বৃত্তের প্রত্যেকটি অপরটির কেন্দ্র দিয়া যায়, তবে প্রত্যেক বৃত্তের পরিধির এক-তৃতীয়াংশ অপর বৃত্তের ভিতরে থাকিবে।

[বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র G ও H এবং ছেদ বিন্দু A ও B।

এখন, প্রত্যেক বৃত্তের ব্যাসার্ধ = GH বলিয়া বৃত্তদ্বয় সমান।

আবার, AGH ও BGH ত্রিভুজদ্বয় সমবাহু বলিয়া,

∠AGB = ∠AHB = 120° = 360° ÷ 3 ;

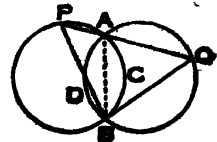
∴ AHB চাপ = AGB চাপ = প্রত্যেক বৃত্তের পরিধির এক-তৃতীয়াংশ।]

7. দুইটি সমান বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। A দিয়া বৃত্তদ্বয়ের পরিধি পর্যন্ত PAQ সরলরেখা টানা হইল। প্রমাণ কর যে, BP = BQ। (C.U. 1928 ; S.F. 1954)

[AB যোগ কর।

এখন, ∵ সমান বৃত্তদ্বয়ের AB সাধারণ জ্যা,

∴ ACB চাপ = ADB চাপ ;

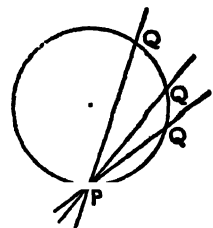
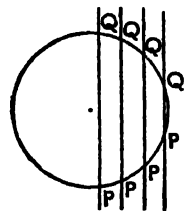
∴ পরিধিস্থ ∠P = পরিধিস্থ ∠Q ;

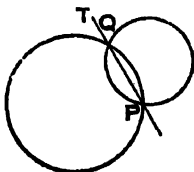
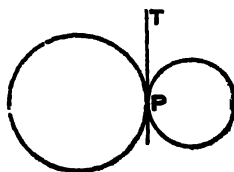
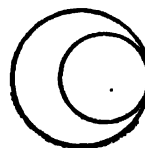
∴ BP = BQ।]

স্পর্শক

27. যে অনির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সরলরেখা কোন বৃত্তের পরিধিকে দুই বিন্দুতে ছেদ করে, তাহাকে **ছেদক** (Secant) বলে।

28. যে সরলরেখা কোন বৃত্তের পরিধিকে স্পর্শ করে এবং উভয় দিকে বর্ধিত হইলেও পরিধিকে ছেদ করে না, তাহাকে বৃত্তটির **স্পর্শক** (Tangent) বলে এবং বিন্দুটিকে **স্পর্শবিন্দু** (Point of contact) বলে।

29. ছেদক ও স্পর্শকের পরস্পর সম্বন্ধ।

মনে কর, একটি বৃত্তের ছেদক বৃত্তটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন একটি ছেদবিন্দু P কে স্থির রাখিয়া ছেদকটিকে যদি এরূপে ঘুরান যায় যে অপর ছেদবিন্দু Q ক্রমশঃ Pর দিকে অগ্রসর হয়, তবে ছেদকটির কোন এক অবস্থানে Q, Pর সহিত মিলিয়া যাইবে। এই অবস্থানে ছেদকটি বৃত্তটির একটি স্পর্শক হইবে এবং P উহার স্পর্শবিন্দু হইবে।

আবার, ছেদকটিকে সমান্তরালভাবে কেন্দ্র হইতে ক্রমশঃ দূরে সরাইয়া লইলে P ও Q ক্রমশঃ পরস্পরের নিকটবর্তী হইবে এবং ছেদকটির কোন এক অবস্থানে P ও Q এক বিন্দুতে মিলিত হইবে। এই অবস্থানে ছেদকটি বৃত্তটির একটি স্পর্শক হইবে এবং ঐ বিন্দুটি উহার স্পর্শবিন্দু হইবে। অতএব,

যে ছেদক কোন বৃত্তকে দুইটি সমাপতিত (Coincident) বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা বৃত্তটির একটি **স্পর্শক** এবং ঐ বিন্দুটি স্পর্শকটির **স্পর্শবিন্দু।**

30. অন্তঃস্পর্শ ও বহিঃস্পর্শ।

প্রথম চিত্র   দ্বিতীয় চিত্র   তৃতীয় চিত্র

মনে কর, দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল (প্রথম চিত্র)। এখন, একটি ছেদবিন্দু P কে স্থির রাখিয়া একটি বৃত্তকে ঘুরাইলে অপর ছেদবিন্দু Q বৃত্তটির কোন এক অবস্থানে Pর সহিত মিলিয়া যাইবে (দ্বিতীয় ও তৃতীয় চিত্র)। এরূপস্থলে বৃত্ত দুইটি পরস্পর P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে বলা হয়।

যখন একটি বৃত্ত অপর একটি বৃত্তের বাহিরে থাকিয়া পরস্পরকে স্পর্শ করে (দ্বিতীয় চিত্র), তখন উহারা বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে বলা হয় এবং এইরূপ স্পর্শকে

বহিঃস্পর্শ (External contact) বলে। আর যখন, একটি বৃত্ত অপর একটি বৃত্তের ভিতরে থাকিয়া পরস্পরকে স্পর্শ করে (তৃতীয় চিত্র), তখন উহারা অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে বলা হয় এবং এইরূপ স্পর্শকে **অন্তঃস্পর্শ** (Internal contact) বলে।

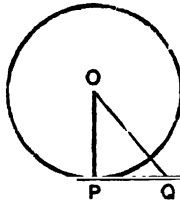
31. দুইটি বৃত্ত দুইএর অধিক বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে না (প্রশ্ন 1, অনুশীলনী 11)। সুতরাং দুইটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তের সাধারণ ছেদক মাত্র একটি। প্রথম চিত্রে, দুইটি বৃত্তের TQP সাধারণ ছেদক। P বিন্দুকে স্থির রাখিয়া একটি বৃত্তকে ঘুরাইলে Q বিন্দু যখন P বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে, তখন সাধারণ ছেদকটি উভয় বৃত্তের পরিধিস্থ ঐ দুই সমাপতিত বিন্দু দিয়া যাইবে (দ্বিতীয় ও তৃতীয় চিত্র) এবং উহা উভয় বৃত্তের স্পর্শক হইবে। অতএব,

দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে স্পর্শবিন্দুতে উহাদের একটি সাধারণ স্পর্শক থাকিবে।

উপপাদ্য 30

বৃত্তের যে কোন স্পর্শক এবং উহার স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত ব্যাসার্ধ পরস্পরের উপর লম্ব।

[The tangent at any point of a circle and its radius through the point are perpendicular to one another.]

(C. U. 1922, '30, '32 ; S. F. 1954, '61, '63, '67, '70, '72).

মনে কর, একটি বৃত্তের O কেন্দ্র এবং উহার P বিন্দুতে PT স্পর্শক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PT ও OP পরস্পরের উপর লম্ব।

প্রমাণ। PTর উপর যে কোন একটি বিন্দু Q লও। OQ যোগ কর।

P বিন্দুতে PT একটি স্পর্শক বলিয়া P ব্যতীত PTর সমুদয় বিন্দু বৃত্তটির বাহিরে অবস্থিত ;

∴ O হইতে PT পর্যন্ত OP, OQ প্রভৃতি যত সরলরেখা টানা যায়, তন্মধ্যে OP ক্ষুদ্রতম। ∴ OP, PTর উপর লম্ব ;

∴ PT ও OP পরস্পরের উপর লম্ব।

অনুসিদ্ধান্ত 1. বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দুতে কেবলমাত্র একটি স্পর্শক টানা যাইতে পারে।

[কারণ, P বিন্দু দিয়া OP ব্যাসার্ধের উপর কেবলমাত্র একটি লম্ব টানা যাইতে পারে।]

অনুসিদ্ধান্ত 2. স্পর্শবিন্দু হইতে স্পর্শকের উপর লম্ব টানিলে লম্বটি কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

[কারণ, স্পর্শবিন্দু P হইতে PT র উপর PO ব্যতীত অপর কোন লম্ব টানা যায় না।]

অনুসিদ্ধান্ত 3. কেন্দ্র হইতে স্পর্শকের উপর লম্ব টানিলে লম্বটি স্পর্শবিন্দু দিয়া যাইবে।

[কারণ, কেন্দ্র O হইতে PT র উপর OP ব্যতীত অপর কোন লম্ব টানা যায় না।]

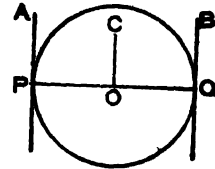
অনুসিদ্ধান্ত 4. বৃত্তের কোন বিন্দু হইতে ঐ বিন্দু দিয়া অঙ্কিত ব্যাসার্ধের উপর লম্ব টানিলে ঐ লম্ব বৃত্তকে উক্ত বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

অনুশীলনী 20

1. একটি বৃত্তের যে কোন ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় সমান্তরাল।

2. একটি বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা বৃত্তটির একটি ব্যাস। (S. F. 1954, '61, '72)

[O যেন বৃত্তটির কেন্দ্র এবং P ও Q যেন PA ও QB সমান্তরাল স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দু। স্পর্শকদ্বয়ের সমান্তরাল করিয়া OC টান। OP, OQ যোগ কর। এখন, AP ‖ CO, $\therefore$ $\angle APO + \angle COP = 2$ সমকোণ; কিন্তু $\angle APO = 1$ সমকোণ, $\therefore$ $\angle COP = 1$ সমকোণ। অনুরূপে, $\angle COQ = 1$ সমকোণ।

A C B P O Q

$\therefore$ $\angle COP + \angle COQ = 2$ সমকোণ,

$\therefore$ POQ একটি সরলরেখা; $\therefore$ বৃত্তটির POQ একটি ব্যাস।]

3. দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃহত্তরটির যে সকল জ্যা ক্ষুদ্রতরটিকে স্পর্শ করে, তাহারা পরস্পর সমান। (C. U. 1868)

[কারণ, জ্যাগুলি ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান ব্যবধানে অবস্থিত।]

4. দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃহত্তরটির যে সকল জ্যা ক্ষুদ্রতরটিকে স্পর্শ করে, তাহাদের প্রত্যেকটি স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। (C. U. 1904)

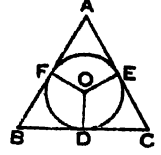
5. একটি বৃত্তের কোন বিন্দু দিয়া অঙ্কিত স্পর্শকটির সহিত সমান্তরাল যাবতীয় জ্যা ঐ বিন্দু হইতে অঙ্কিত ব্যাস দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। (C. U. 1918)

6. একটি বৃত্তের কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি স্পর্শক টান।

7. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টান। (C. U. 1932)

[বৃত্তটির কেন্দ্র দিয়া সরলরেখাটির উপর একটি লম্ব আঁক। এই বৃত্ত ও লম্বটির ছেদবিন্দুদ্বয়ে লম্বটির উপর দুইটি লম্ব আঁক। এই শেষোক্ত লম্বদ্বয় উদ্দিষ্ট স্পর্শক হইবে।]

8. যদি একটি বৃত্তের পরিধি তিন বিন্দুতে তিনটি সমান চাপে বিভক্ত হয়, তবে ঐ তিন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করিবে। (C. U. 1929)

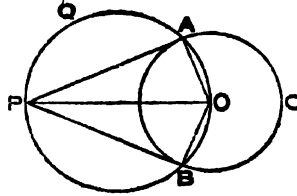
[O-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের পরিধি D, E ও F বিন্দুতে সমান তিনটি চাপে বিভক্ত হইয়াছে ; D, E ও F বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকত্রয় যেন ABC ত্রিভুজ উৎপন্ন করিল। OD, OE ও OF যোগ কর। এখন,

∵ EF চাপ সমুদয় পরিধির এক-তৃতীয়াংশ,

∴ $\angle FOE = 360^\circ \div 3 = 120^\circ$। ∴ AEOF চতুর্ভুজের $\angle FOE = 120^\circ$, $\angle E = \angle F = 90^\circ$; ∴ $\angle A = 60^\circ$। এইরূপে, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 60^\circ$।

∴ ABC সমবাহু ত্রিভুজ।]

উপপাদ্য 31

একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

[Two tangents can be drawn to a circle from an external point.] (S. F. 1955, '60)

মনে কর, ABC বৃত্তের O কেন্দ্র এবং P বহিঃস্থ একটি বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, P বিন্দু হইতে ABC বৃত্তে দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

PO যোগ কর এবং PO কে ব্যাস লইয়া PQO বৃত্ত অঙ্কিত কর।

ABC বৃত্তের O অন্তঃস্থ এবং P বহিঃস্থ বিন্দু বলিয়া PQO বৃত্ত ABC বৃত্তকে দুই বিন্দুতে ছেদ করিবে। মনে কর, বিন্দু দুইটি A ও B।

PA, PB, OA ও OB যোগ কর।

প্রমাণ। PAO ও PBO কোণদ্বয়ের প্রত্যেকে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ,

∴ উহারা প্রত্যেকে সমকোণ ;

∴ PA ও PB যথাক্রমে OA ও OB ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

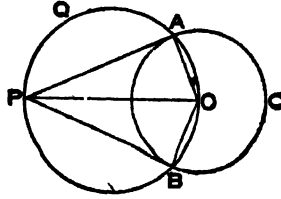
∴ PA ও PB যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক।

∴ বহিঃস্থ P বিন্দু হইতে ABC বৃত্তে দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

মন্তব্য। বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাকে ঐ বিন্দুর **স্পর্শ-জ্যা** (Chord of contact) বলে। চিত্রে, A ও B বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা P বিন্দুর স্পর্শ-জ্যা।

উপপাদ্য 32

একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান এবং উহারা কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

[The two tangents to a circle from an external point are congruent and they subtend congruent angles at the centre.]
(S. F. 1955, '57, '60, '62, '64, '66, '69, '72)

মনে কর, ABC বৃত্তের O কেন্দ্র, P বহিঃস্থ বিন্দু এবং P হইতে PA ও PB বৃত্তটির দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করিতে হইবে যে, PA = PB এবং ∠POA = ∠POB।

OA, OB, OP যোগ কর।

প্রমাণ। PAO ও PBO ত্রিভুজদ্বয়ের

সমকোণ PAO = সমকোণ PBO, অতিভুজ PO = অতিভুজ PO

এবং OA = OB ; (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। ∴ PA = PB এবং ∠POA = ∠POB।

অনুসিদ্ধান্ত। একটি বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে কোন স্পর্শক টানা যায় না।

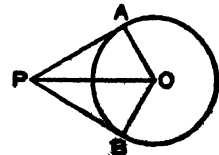
[কারণ, R যদি O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি অন্তঃস্থ বিন্দু হয়, তবে OR কে ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত, O-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে কোন বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।]

অনুশীলনী 21

1. একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানিলে উহারা ঐ বহিঃস্থ বিন্দু ও কেন্দ্র সংযোজক সরলরেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করিবে। [উপ. 32 এর প্রমাণ দেখ।] (C. U. 1923, '26)

2. একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানিলে ঐ বিন্দু ও কেন্দ্র সংযোজক সরলরেখা স্পর্শ-জ্যাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (S. F. 1972)

3. যে বৃত্ত দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করে, তাহার কেন্দ্র ঐ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর থাকিবে। (C. U. 1926)

[ইঙ্গিত: O-কেন্দ্রীয় বৃত্ত পরস্পরচ্ছেদী PA ও PB কে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। PO যোগ কর। প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠APO = ∠BPO। OA ও OB যোগ কর। এখন, △PAO ≡ △PBO, ∴ ∠APO = ∠BPO ; ∴ কেন্দ্র O, ∠APBর সমদ্বিখণ্ডকের উপর থাকিবে।]

4. একটি বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল স্পর্শক অপর একটি স্পর্শকের যে অংশ ছিন্ন করে, তাহা বৃত্তটির কেন্দ্রে সমকোণ উৎপন্ন করে।

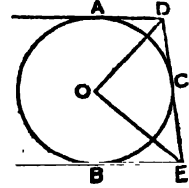
(B. U. 1883 ; D. B. 1929 ; S. F. 1964)

[ইঙ্গিত : O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত সমান্তরাল স্পর্শকদ্বয় C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের DE অংশ ছিন্ন করিয়াছে। এখন,

$\angle DOE = 180° - (\angle ODE + \angle OED)$

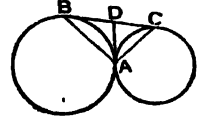
$= 180° - \frac{1}{2}(\angle ADE + \angle BED)$ (প্রশ্ন 1)

$= 180° - \frac{1}{2} \times 180°$

$= 180° - 90° = 90°$ ।]

5. দুইটি বৃত্ত বহিঃস্থভাবে A বিন্দুতে স্পর্শ করে। যদি একটি সরলরেখা ঐ বৃত্ত দুইটিকে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করে, তবে BAC কোণ এক সমকোণ।

(C. U. 1893, 1913 ; S. F. 1955, '59, '62, '69)

[ইঙ্গিত : A বিন্দুতে বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শকটি টান ; উহা যেন BC কে D বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন, DA = DB (উপ. 32)

$\therefore$ $\angle DAB = \angle DBA$ । অনুরূপে, $\angle DAC = \angle DCA$ । $\therefore$ $\angle BAC = \angle DAB + \angle DAC = \angle DBA + \angle DCA = \frac{1}{2} \times 2$ সমকোণ $= 1$ সমকোণ।]

6. কোন বৃত্তে পরিলিখিত চতুর্ভুজের যে কোন দুইটি বিপরীত বাহুর সমষ্টি অপর দুইটি বিপরীত বাহুর সমষ্টির সমান। (C. U. 1941 ; S. F. 1960, '62)

[উপ. 32 এর প্রথম অংশের সাহায্যে প্রমাণ কর।]

7. কোন বৃত্তে পরিলিখিত চতুর্ভুজের যে কোন দুইটি বিপরীত বাহু বৃত্তটির কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে, তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণ।

(B. U. 1935 ; S. F. 1963)

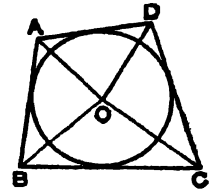
[ইঙ্গিত : O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের ABCD একটি পরিলিখিত চতুর্ভুজ। OA, OB, OC, OD যোগ কর।

এখন, $\angle AOD + \angle BOC$

$= (180° - \angle OAD - \angle ODA) + (180° - \angle OBC - \angle OCB)$

$= 360° - (\angle OAD + \angle ODA + \angle OBC + \angle OCB)$

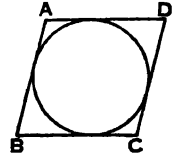
$= 360° - \frac{1}{2} \times$ ABCD চতুর্ভুজের চারিকোণ [প্রশ্ন 1]

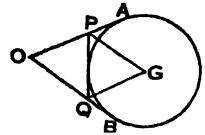
$= 360° - \frac{1}{2} \times 360° = 180°$ ।]

8. বৃত্তে পরিলিখিত সামান্তরিক একটি রম্বস। (S. F. 1957)

[ইঙ্গিত : বৃত্তে পরিলিখিত ABCD একটি সামান্তরিক এখন, AB = CD এবং BC = AD (সামান্তরিকের বিপরীত বাহু)। আবার,

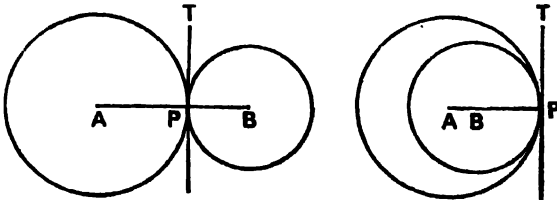
AB + CD = BC + AD (প্রশ্ন 6)

∴ AB + AB = BC + BC ; ∴ AB = BC

∴ AB = BC = CD = AD ; ∴ ABCD সামান্তরিক একটি রম্বস।]

9. একটি বৃত্তের OA ও OB দুইটি নির্দিষ্ট স্পর্শক। অপর যে কোন স্পর্শক PQ, OA কে P বিন্দুতে এবং OB কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, PQ সরলরেখা বৃত্তটির কেন্দ্রে একটি নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে। (C. U. 1923)

[ইঙ্গিত : বৃত্তটির কেন্দ্র যেন G। GP ও GQ যোগ কর এখন, $\angle PGQ = 180^\circ - (\angle GPQ + \angle GQP) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle APQ + \angle BQP)$ [প্রশ্ন 1] $= 180^\circ - \frac{1}{2}\{(\angle OQP + \angle O) + (\angle OPQ + \angle O)\} = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ + \angle O) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle O$; কিন্তু $\angle O$ নির্দিষ্ট, ∴ $\angle PGQ$ নির্দিষ্ট।]

উপপাদ্য 33

দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে স্পর্শবিন্দু, কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখায় অবস্থিত থাকিবে।

[If two circles touch, the point of contact lies in the straight line through the centres.] (S. F. 1959, '62, '65, '70, '72)

মনে কর, দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র A ও B এবং বৃত্ত দুইটি পরস্পর P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, B ও P একই সরলরেখায় অবস্থিত।

AP ও BP যোগ কর।

প্রমাণ। ∵ বৃত্ত দুইটি P বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করিয়াছে,

∴ P বিন্দুতে উভয় বৃত্তের একটি সাধারণ স্পর্শক থাকিবে। (অনু. 31)

মনে কর, PT উহাদের সাধারণ স্পর্শক।

∴ A-কেন্দ্রীয় বৃত্তের P বিন্দুতে PT স্পর্শক এবং PA ব্যাসার্ধ।

∴ PA, PTর উপর P বিন্দুতে লম্ব।

এইরূপ, PB, PTর উপর P বিন্দুতে লম্ব।

∴ PA ও PB একই সরলরেখা।

∴ A, B ও P একই সরলরেখায় অবস্থিত।

অনুসিদ্ধান্ত 1. যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পর বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে, তবে তাহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইবে। (C. U. 1910)

[কারণ, উপরের চিত্রে, AP ও BP একই সরলরেখায় অবস্থিত বলিয়া কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $AB=AP+BP$।]

অনুসিদ্ধান্ত 2. যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে, তবে তাহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তরের সমান হইবে। (C. U. 1910)

অনুসিদ্ধান্ত 3. দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখায় যদি বৃত্তদ্বয়ের একটি সাধারণ বিন্দু থাকে, তবে বৃত্ত দুইটি ঐ বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করিবে।

অনুশীলনী 22

1. a, b ও c ব্যাসার্ধবিশিষ্ট তিনটি বৃত্তের প্রত্যেকটি অপর দুইটিকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। কেন্দ্রগুলির ব্যবধান নির্ণয় কর।

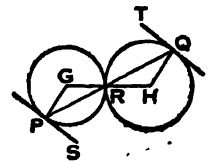
2. তিনটি বৃত্তের ব্যাসার্ধত্রয় নির্দিষ্ট। বৃত্ত তিনটি এরূপে অঙ্কিত কর, যেন উহারা পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

[ব্যাসার্ধত্রয় a, b ও c হইলে $a+b, b+c$ ও $c+a$ পরিমিত বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুত্রয় বৃত্ত তিনটির কেন্দ্র হইবে।]

3. যে সকল বৃত্ত পরস্পরকে একই বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাহাদের কেন্দ্রগুলি একই সরলরেখায় থাকিবে। (C. U. 1912)

[ইঙ্গিত: উপ. 33 এর চিত্রে মনে কর, বৃত্তগুলির P স্পর্শবিন্দু এবং PT উহাদের সাধারণ স্পর্শক। তাহা হইলে যে সরলরেখা PT কে P বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে, তাহা যাবতীয় বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যাইবে। ∴ বৃত্তগুলির কেন্দ্রসমূহ একই সরলরেখায় থাকিবে।]

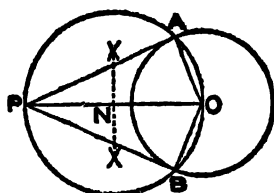
4. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করিল। স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত একটি সরলরেখা বৃত্ত দুইটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, (i) P ও Q দিয়া অঙ্কিত ব্যাসার্ধদ্বয় সমান্তরাল এবং (ii) P ও Q বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় সমান্তরাল।

[ইঙ্গিত: G ও H কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয় যেন পরস্পরকে R বিন্দুতে স্পর্শ করিল। PS ও QT যেন যথাক্রমে বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শক। GP, GR, HQ ও HR যোগ কর। এখন, (i) G, R ও H একই সরলরেখায় অবস্থিত (উপ. 33), ∴ $\angle GPR=\angle GRP$ (∵ GP ও GR ব্যাসার্ধদ্বয় সমান) = বিপ্রতীপ $\angle HRQ=\angle HQR$ (∵ HR ও HQ ব্যাসার্ধদ্বয় সমান)। কিন্তু GPR ও HQR কোণদ্বয় একান্তর কোণ, ∴ $GP \parallel HQ$।

আবার, (ii) $\angle GPS=\angle HQT$ (∵ প্রত্যেকে সমকোণ, উপ. 30) এবং $\angle GPR=\angle HQR$ (প্রমাণিত), ∴ $\angle QPS=\angle PQT$ কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ, ∴ $PS \parallel QT$।]

সম্পাদ্য 9

একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক টানিতে হইবে। (C. U. 1912, '24, '29, '31 ; S. F. 1960)

[To draw a tangent to a given circle from a given external point.]

মনে কর, নির্দিষ্ট বৃত্তটির O কেন্দ্র এবং P একটি নির্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দু।

P বিন্দু হইতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক টানিতে হইবে।

অঙ্কন। PO যোগ কর এবং উহাকে N বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। N কে কেন্দ্র করিয়া এবং NO ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহা যেন নির্দিষ্ট বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল।

PA যোগ কর।

তাহা হইলে PA, বৃত্তটির একটি স্পর্শক হইবে।

প্রমাণ। AO যোগ কর।

PAO একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ,

∴ $\angle$PAO = এক সমকোণ।

∴ PA ও OA পরস্পরের উপর লম্ব,

∴ PA, A বিন্দুতে একটি স্পর্শক। (উপ. 30)

মন্তব্য। PB ও BO যোগ করিয়া প্রমাণ করা যাইতে পারে যে PB, বৃত্তটির আর একটি স্পর্শক।

অনুশীলনী 23

(বিবিধ প্রশ্ন)

1. দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা যদি কেন্দ্রদ্বয়ে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে বৃত্ত দুইটি পরস্পর সমান।

[ইঙ্গিত : G ও H কেন্দ্রীয় দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করায় উহাদের সাধারণ জ্যা AB কেন্দ্রদ্বয়ে AGB ও AHB দুইটি সমান কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। এখন,

GAB ও HAB ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle$AGB = $\angle$AHB (কল্পনা),

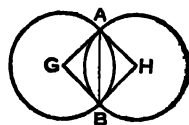
∴ $\angle$GAB + $\angle$GBA = $\angle$HAB + $\angle$HBA এবং

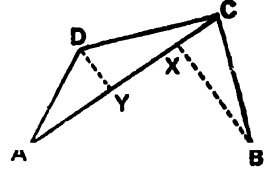
$\angle$GAB = $\angle$GBA ও $\angle$HAB = $\angle$HBA বলিয়া

$\angle$GAB = $\angle$HAB এবং AB = AB ;

∴ $\triangle$GAB ≡ $\triangle$HAB। (স্বতঃসিদ্ধ)

∴ GA = HA ; ∴ বৃত্তদ্বয়ের দুই ব্যাসার্ধ পরস্পর সমান,

∴ বৃত্ত দুইটি পরস্পর সমান।]

2. একটি চতুর্ভুজের বাহুগুলিকে ব্যাস করিয়া চারিটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে, যে কোন দুইটি সন্নিহিত বৃত্তের সাধারণ জ্যা, অপর বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যার সহিত সমান্তরাল।

[ইঙ্গিত : ABCD একটি চতুর্ভুজ। AC যোগ কর। ACর উপর BX ও DY লম্ব টান। ∵ ∠AXB এবং ∠BXCর প্রত্যেকে সমকোণ ; ∴ AB ও BC কে ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্তদ্বয় X দিয়া যাইবে এবং এই সন্নিহিত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা BX হইবে (অনুসিদ্ধান্ত 1, উপ. 27)।

এইরূপ, CD ও DA কে ব্যাস লইয়া অঙ্কিত সন্নিহিত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা DY হইবে। কিন্তু BX ও DY এর প্রত্যেকে ACর উপর লম্ব। ∴ BX ∥ DY।]

3. একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত যে কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি নির্দিষ্ট স্থির (fixed) বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে।

[বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজটির বাহুগুলি বৃত্তটির চারিটি জ্যা। সুতরাং উহাদের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকগুলি বৃত্তটির কেন্দ্রে অর্থাৎ একটি নির্দিষ্ট স্থির বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিবে (অনুসি. উপ. 21 দেখ।)।]

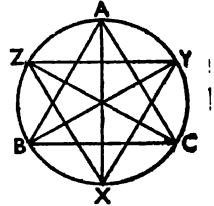
4. ABC ত্রিভুজের ∠A, ∠B ও ∠Cর সমদ্বিখণ্ডকত্রয় ত্রিভুজটির পরিবৃত্তকে যথাক্রমে X, Y ও Z বিন্দুতে ছেদ করে। XYZ ত্রিভুজের কোণগুলিকে ABC ত্রিভুজের কোণগুলি দ্বারা প্রকাশ কর। (C. U. 1939 ; S. F. 1963)

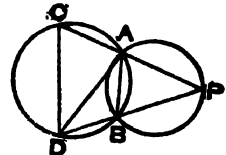
[$\angle YXZ = \angle AXY + \angle AXZ$

$= \angle ABY + \angle ACZ$

$= \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C$

$= \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C - \frac{1}{2}\angle A$

$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$, ইত্যাদি।]

5. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। একটি বৃত্তের পরিধিস্থ যে কোন বিন্দু P হইতে অপর বৃত্তটির পরিধি পর্যন্ত PAC ও PBD সরলরেখাদ্বয় টানা হইল। প্রমাণ কর যে, CD চাপ নিয়ত সমান। (C. U. 1936)

[ইঙ্গিত : AD যোগ কর। এখন, AB চাপের উপর অবস্থিত ∠APB নিয়ত সমান। অনুরূপে, ∠ADB নিয়ত সমান। ∴ APB ও ADB কোণদ্বয়ের সমষ্টি ∠CAD নিয়ত সমান ; ∴ চাপ CD নিয়ত সমান।]

6. একটি বৃত্তের AB ও AC দুইটি নির্দিষ্ট স্পর্শক। ABC ত্রিভুজের বাহিরে বৃত্তের পরিধিতে D যে কোন বিন্দু। প্রমাণ কর যে, ∠ABD ও ∠ACDর সমষ্টি নিয়ত সমান। (P. U. 1892)

[ABDC চতুর্ভুজের ∠A নির্দিষ্ট এবং ∠D নিয়ত সমান ; ∴ ∠ABD + ∠ACD নিয়ত সমান।]

7. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। যদি বর্ধিত AB ও DC, P বিন্দুতে এবং BC ও AD, Q বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\angle AQB$ ও $\angle APD$র সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ এক সমকোণ। (P. U. 1934)

[$\angle P$ ও $\angle Q$র সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যেন পরস্পরকে O বিন্দুতে এবং বর্ধিত PO যেন AD কে E বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন,

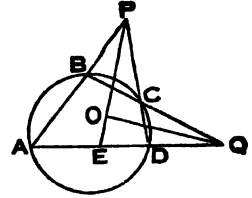
$\angle POQ = \angle OEQ + \angle OQE$

$= \angle A + \angle APE + \angle OQE$

$= \frac{1}{2}(2\angle A + \angle APD + \angle AQB)$

$= \frac{1}{2}\{(\angle A + \angle APD) + (\angle A + \angle AQB)\}$

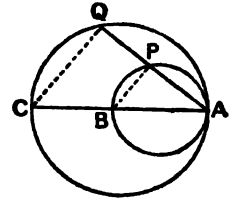
$= \frac{1}{2}(\angle PDQ + \angle PBQ) = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ADC)$ (অনুসিদ্ধান্ত, উপ. 28)

$= \frac{1}{2} \times 180^\circ$ (উপ. 28) $= 90^\circ$।]

8 দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে। যদি ক্ষুদ্রতর বৃত্তটি বৃহত্তর বৃত্তটির কেন্দ্র দিয়া গমন করে, তবে প্রমাণ কর যে, স্পর্শবিন্দু হইতে বৃহত্তর বৃত্তে অঙ্কিত জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্ত দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। (C. U. 1886)

[বৃত্ত দুইটি যেন A বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। বৃহত্তর বৃত্তে অঙ্কিত AQ জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। স্পর্শবিন্দু A হইতে ক্ষুদ্রতর বৃত্তে AB ব্যাস এবং বৃহত্তর বৃত্তে AC ব্যাস টান। তাহা হইলে A, B ও C একই সরলরেখায় অবস্থিত (উপ. 33)।

BP ও CQ যোগ কর।

প্রমাণ। $\angle APB = \angle AQC$ ($\because$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া প্রত্যেকে সমকোণ) ; $\therefore$ BP ∥ CQ।

কিন্তু B, ACর মধ্যবিন্দু ; $\therefore$ P, AQর মধ্যবিন্দু।]

9. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করিলে, ঐ ছেদবিন্দু দিয়া উহার এক বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব বিপরীত বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [**ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য**] (B. U. 1923)

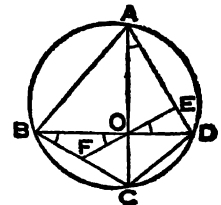
[ইঙ্গিত : কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O দিয়া ADর উপর অঙ্কিত EO লম্ব BC কে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, FB = FC।

প্রমাণ। CBAD বৃত্তাংশস্থ $\angle CBD = \angle CAD$

$= 90^\circ - \angle AOE = \angle EOD =$ বিপ্রতীপ $\angle FOB$;

$\therefore$ FB = FO।

এইরূপ, FC = FO , $\therefore$ FB = FC।]

10. কোন বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তটিতে দুইটি স্পর্শক টানিলে উহারা যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহা স্পর্শবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা ও স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের যে কোনটি হইতে অঙ্কিত ব্যাসের অন্তর্গত কোণের দ্বিগুণ হইবে। (C. U. 1875)

[ইঙ্গিত: O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দু হইতে PA ও PB বৃত্তটির দুইটি স্পর্শক। AC ব্যাস আঁক। AB ও OB যোগ কর। এখন, OAPB চতুর্ভুজের OAP ও OBP কোণদ্বয়ের প্রত্যেকে সমকোণ;

$\therefore$ OAPB চতুর্ভুজ বৃত্তস্থ।

$\therefore$ $\angle P =$ বহিঃ$\angle BOC$ (অনুসি., উপ. 28)

$= \angle OAB + \angle OBA = 2\angle OAB$ ($\because$ $OA = OB$)।]

11. একটি বৃত্তের AB ব্যাস। A বিন্দুতে ABর সমান করিয়া AC স্পর্শক টানা হইল। BC যোগ করায় উহা বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $CD = BD$ এবং $AD = CD$ (C. U. 1885)

[ইঙ্গিত: AD যোগ কর। এখন, অর্ধবৃত্তস্থ $\angle ADB =$ 1 সমকোণ, $\therefore$ $\angle ADC = 1$ সমকোণ। $\therefore$ ACD ও ABD সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ $AC =$ অতিভুজ AB (কল্পনা) এবং AD সাধারণ, $\therefore$ $CD = BD$।

আবার, CAB ত্রিভুজের $\angle CAB$ সমকোণ (উপ. 30) এবং D, অতিভুজ CBর মধ্যবিন্দু (প্রমাণিত); $\therefore$ $AD = \frac{1}{2}CB = CD$।]

12. বৃত্তে অন্তর্লিখিত ষড়ভুজের যে কোন তিনটি একান্তর কোণের সমষ্টি চারি সমকোণ।

[বৃত্তের অন্তর্লিখিত ABCDEF একটি ষড়ভুজ। AD যোগ কর। এখন, ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ; $\therefore$ $\angle ABC + \angle CDA = 2$ সমকোণ (উপ. 28)। আবার, ADEF একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ;

$\therefore$ $\angle ADE + \angle EFA = 2$ সমকোণ।

$\therefore$ যোগ করিয়া, $\angle ABC + \angle CDE + \angle EFA = 4$ সমকোণ।]

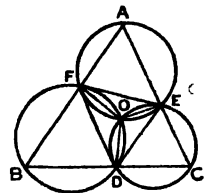
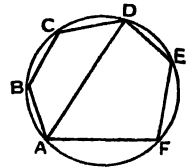
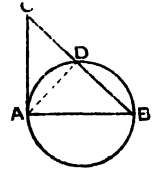
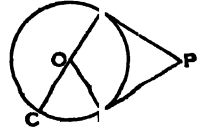
13. ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। BC, CA ও ABর উপর যথাক্রমে D, E ও F যে কোন তিনটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, AEF, BDF ও CDE ত্রিভুজের পরিবৃত্তত্রয় একই বিন্দু দিয়া যাইবে।

[AEF ও BDF ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্ত যেন পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, CDE ত্রিভুজের পরিবৃত্ত O দিয়া যাইবে। OD, OE ও OF যোগ কর। এখন, AFOE বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, $\therefore$ $\angle A + \angle FOE = 180^\circ$ (উপ. 28), $\therefore$ $\angle FOE = 180^\circ - \angle A$। এইরূপ, $\angle FOD = 180^\circ - \angle B$

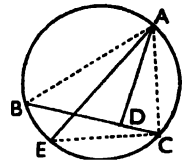
$\therefore$ $\angle DOE = 360^\circ - \angle FOE - \angle FOD$

$= 360^\circ - (180^\circ - \angle A) - (180^\circ - \angle B)$

$= \angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$, $\therefore$ $\angle DOE + \angle C = 180^\circ$;

$\therefore$ CDOE বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ (উপ 29); $\therefore$ CDE ত্রিভুজের পরিবৃত্ত O দিয়া যাইবে।]

14. কোন বৃত্তের AE একটি ব্যাস এবং BC জ্যার উপর AD লম্ব। প্রমাণ কর যে, ∠BAD = ∠EAC।

(C. U. 1948 ; S. F. 1962)

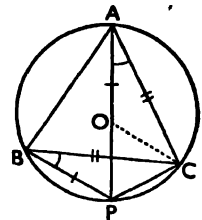
[AB, AC, CE যোগ কর। এখন, BAD ও EAC ত্রিভুজদ্বয়ের ∠ABD = ∠AEC (∵ একই AC চাপের উপর অবস্থিত), সম ∠ADB = অর্ধবৃত্তস্থ ∠ACE, ∴ তৃতীয় ∠BAD = তৃতীয় ∠EAC।]

15. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। উহার পরিবৃত্তের BC চাপের উপর P যে কোন বিন্দু। প্রমাণ কর যে, AP = BP + CP। (C. U. 1939)

[AP হইতে BPর সমান করিয়া AO লও। OC যোগ কর।

এখন, AOC ও BPC ত্রিভুজদ্বয়ের

AO = BP (অঙ্কন), AC = BC (কল্পনা) এবং

∠OAC = ∠PBC (∵ PC চাপের উপর পরিধিস্থ কোণ) ;

∴ △AOC ≡ △BPC, ∴ CO = CP।

∴ COP ত্রিভুজের ∠COP = ∠CPO = ∠ABC (∵ AC চাপের উপর পরিধিস্থ কোণ) = 60°, ∴ ∠COP এবং ∠CPO এর প্রত্যেকে = 60°।

∴ তৃতীয় ∠OCP = 60° ;

∴ OP = CP।

∴ AP = AO + OP = BP + CP।]

অনুপাত ও সমানুপাত

32. একজাতীয় দুইটি রাশির মধ্যে প্রথমটি দ্বিতীয়টির কত অংশ বা কত গুণ, তাহা যদ্দারা প্রকাশিত হয়, তাহাকে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির **অনুপাত** (Ratio) বলে। যেমন, 2 গ্রাম : 3 গ্রাম = 2 গ্রাম ÷ 3 গ্রাম = $\frac{2}{3}$.

33. যদি দুইটি অনুপাত পরস্পর সমান হয়, তবে একটি **সমানুপাত** (Proportion) উৎপন্ন হয়। যেমন, '5 মিটার : 3 মিটার = 10 গ্রাম : 6 গ্রাম' একটি সমানুপাত, কারণ অনুপাত দুইটির প্রত্যেকটি $\frac{5}{3}$ এর সমান।

যদি চারিটি রাশির প্রথম ও দ্বিতীয়ের অনুপাত এবং তৃতীয় ও চতুর্থের অনুপাত পরস্পর সমান হয়, তবে রাশি চারিটিকে **সমানুপাতী** (Proportional) বলে। যেমন, 4, 6, 8 ও 12 এই চারিটি রাশি সমানুপাতী। ইহাকে নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যাইতে পারে।

(1) $\frac{4}{6} = \frac{8}{12}$, (2) 4 : 6 = 8 : 12, (3) 4 : 6 : : 8 : 12.

ইহাকে '4 অনুপাত 6 সমান 8 অনুপাত 12' বলিয়া পড়া হয়। সমানুপাতের চতুর্থ রাশিকে **চতুর্থ সমানুপাতী** (Fourth proportional) বলে।

চারি অপেক্ষা অধিক রাশিও সমানুপাতী হইতে পারে। যেমন, $2:3=4:6=6:9$; কারণ প্রত্যেকটি অনুপাতের মান $\frac{2}{3}$· ইহাকে '$2:4:6=3:6:9$' লেখা চলে।

34. ক্রমিক সমানুপাত।

সমজাতীয় তিনটি রাশির প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির যে অনুপাত, দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিরও যদি সেই অনুপাত হয়, অর্থাৎ যদি ১ম : ২য় : : ২য় : ৩য় হয়, তবে রাশি তিনটিকে **ক্রমিক সমানুপাতী** (In continued proportion) বলে। তৃতীয় রাশিকে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির **তৃতীয় সমানুপাতী** (Third proportional) বলে এবং দ্বিতীয় রাশিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশির **মধ্য-সমানুপাতী** (Mean proportional) বলে।

∵ ক্রমিক সমানুপাতী তিনটি রাশির প্রথম : দ্বিতীয় = দ্বিতীয় : তৃতীয় ;

∴ প্রথম × তৃতীয় = (দ্বিতীয়)^2 ।

সুতরাং দুইটি রাশির গুণফল অপর একটি রাশির বর্গের সমান হইলে, শেষোক্ত রাশিটিকে প্রথম রাশি দুইটির **মধ্য-সমানুপাতী** বলে।

$a:b$ এর **দ্বিগুণানুপাত** (Duplicate ratio) $a^2:b^2$,

ত্রিগুণানুপাত (Triplicate ratio) $a^3:b^3$, ইত্যাদি।

$a:b$ এর **দ্বিভাজিত অনুপাত** (Sub-duplicate ratio) $\sqrt{a}:\sqrt{b}$,

ত্রিভাজিত অনুপাত (Sub-triplicate ratio) $\sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{b}$, ইত্যাদি।

বীজগণিত হইতে আমরা জানি, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ এবং

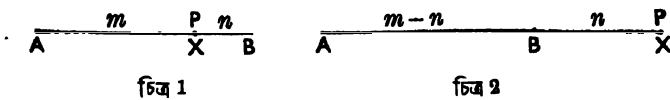
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$ হইলে, প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}$.

35. (1) একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে $m:n$ এর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত কর। (2) দেখাও যে, সরলরেখাটিকে কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত করা যায়।

(1) মনে কর, AB সরলরেখাকে $m:n$ এর অনুপাতে (*i*) অন্তর্বিভক্ত এবং (*ii*) বহির্বিভক্ত করিতে হইবে।

m P n
A X B

চিত্র 1

m−n n P
A B X

চিত্র 2

(*i*) AB কে $(m+n)$ সমান অংশে বিভক্ত কর (চিত্র 1)। AB হইতে m অংশের সমান AX লও। তাহা হইলে, XB $=n$ অংশ।

∴ AX : XB $=m$ অংশ : n অংশ $=m:n$.

∴ AB সরলরেখা X বিন্দুতে $m:n$ এর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হইয়াছে।

(*ii*) AB কে $(m-n)$ সমান অংশে বিভক্ত কর, যেখানে $m > n$ (চিত্র 2)। এইরূপে প্রাপ্ত অংশগুলি হইতে n-সংখ্যক অংশ লও এবং বর্ধিত AB হইতে উহাদের দৈর্ঘ্যসমষ্টির সমান করিয়া BX লও। তাহা হইলে, AX $=(m-n+n)$ অংশ $=m$ অংশ।

$\therefore$ AX : XB $=m$ অংশ : n অংশ $=m : n$.

$\therefore$ AB সরলরেখা X বিন্দুতে $m : n$ এর অনুপাতে বহির্বিভক্ত হইয়াছে।

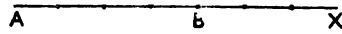
(2) চিত্র 1 হইতে, AX : AB $=m : m+n$. যদি অপর কোন P বিন্দু AB কে $m : n$ এর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, তবে AP : AB $=m : m+n$.

$\therefore$ AX : AB = AP : AB $\therefore$ AX = AP $\therefore$ X ও P একই বিন্দু।

$\therefore$ X একমাত্র বিন্দু, যাহা AB কে $m : n$ এর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

অনুরূপে চিত্র 2 হইতে দেখান যায় যে, X একমাত্র বিন্দু যাহা AB কে $m : n$ এর অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

উদাহরণ। নির্দিষ্ট সরলরেখা AB কে (*i*) অন্তঃস্থভাবে এবং (*ii*) বহিঃস্থভাবে 7 : 3 এর অনুপাতে বিভক্ত কর।

(*i*) AB কে (7+3) বা 10 সমান অংশে বিভক্ত কর (চিত্র 1)। AB হইতে 7 অংশের সমান AX লও। তাহা হইলে, XB = 3 অংশ।

চিত্র 1 চিত্র 2

$\therefore$ AX : XB = 7 অংশ : 3 অংশ = 7 : 3.

(*ii*) AB কে (7 − 3) বা 4 সমান অংশে বিভক্ত কর (চিত্র 2)। বর্ধিত AB হইতে এইরূপ 3 অংশের সমান BX লও। তাহা হইলে, AX = 7 অংশ।

$\therefore$ AX : XB = 7 অংশ : 3 অংশ = 7 : 3.

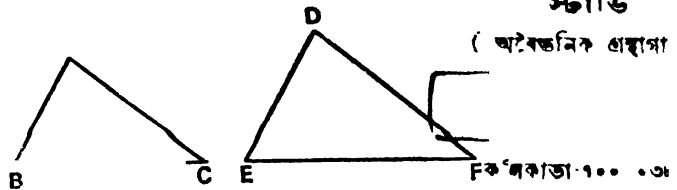
36. **সমতল ক্ষেত্রের সাদৃশ্য।** একাধিক সমতল ক্ষেত্রের আকৃতি যদি একই প্রকারের হয়, তবে তাহাদিগকে **সদৃশ** (Similar) **সমতল ক্ষেত্র** বলে। একাধিক সমতল ক্ষেত্রের সাদৃশ্য (Similarity) উহাদের আকৃতির উপর নির্ভর করে, উহাদের আয়তনের উপর নির্ভর করে না। কাজেই দুইটি সদৃশ সমতল ক্ষেত্রের আয়তন অসমান হইতে পারে। দুইটি সদৃশ সমতল ক্ষেত্রের আয়তন সমান হইলে উহারা সর্বসম (Congruent) হয়।

একটি সমতল ক্ষেত্রের কোণগুলি সমান এবং বাহুগুলি সমান হইলে তাহাকে **সুষম** (Regular) **সমতল ক্ষেত্র** বলে।

দুইটি ত্রিভুজের একটির তিন কোণ যথাক্রমে অপরটির তিন কোণের সমান হইলে উহাদিগকে **সদৃশকোণী** (Equiangular) **ত্রিভুজ** বলে।

দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত সমান হইলে উহাদিগকে **সদৃশ** (Similar) **ত্রিভুজ** বলে। সুতরাং দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান এবং অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।

স্থানান্তর দ্বারা সাদৃশ্যের প্রমাণ। উপপাদ্য 36এ দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের একটিকে অপরটির উপর যথাযথভাবে স্থাপন করিয়া উহাদের বাহুগুলিকে সমানুপাতী বলিয়া প্রমাণ করা হইয়াছে, যাহার ফলে সদৃশকোণী ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ বলিয়া প্রতিপন্ন হইয়াছে।

সদৃশ ক্ষেত্রের ধর্ম। (1) এক টুকরা কাগজ লইয়া বড় করিয়া দুইটি সদৃশকোণী

ত্রিভুজ ABC ও DEF আঁক, যাহাদের $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$.

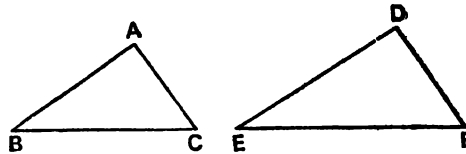
ত্রিভুজ দুইটির বাহুগুলি মাপ এবং নিম্নলিখিতরূপ ঘর করিয়া উহাদের মাপগুলি লিখ।

AB =   , BC =   , CA =   ,

DE =   , EF =   , FD =   ।

মাপগুলি পরীক্ষা করিয়া দেখ, AB : DE = BC : EF = CA : FD হইয়াছে।

$\therefore$ দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হইলে উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হয়। কাজেই দেখা গেল, সদৃশকোণী ত্রিভুজ সদৃশ।

(2) আর এক টুকরা কাগজ লইয়া বড় করিয়া দুইটি ত্রিভুজ ABC ও DEF আঁক,

যাহাদের AB : DE = BC : EF = CA : FD।

ত্রিভুজ দুইটির কোণগুলি মাপ এবং নিম্নলিখিতরূপ ঘর করিয়া উহাদের মাপগুলি লিখ।

$\angle A =$, $\angle B =$, $\angle C =$,

$\angle D =$, $\angle E =$, $\angle F =$ ।

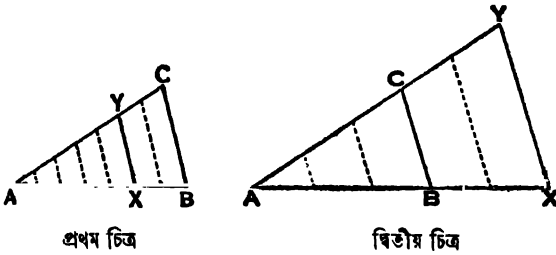
মাপগুলি পরীক্ষা করিয়া দেখ, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$ হইয়াছে।

$\therefore$ দুইটি ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হইলে উহারা সদৃশকোণী হয়। কাজেই দেখা গেল, দুইটি ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হইলে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হইবে।

উপপাদ্য 34

ত্রিভুজের এক বাহুর সহিত সমান্তরাল করিয়া কোন সরলরেখা অঙ্কিত করিলে উহা অপর দুই বাহুকে অথবা বর্ধিত অপর দুই বাহুকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।

[If a line is drawn parallel to one side of a triangle the other two sides, or those sides produced are divided proportionally.]

(H. S. 1973)

ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সহিত সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত XY সরলরেখা AB ও AC কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে প্রথম চিত্রে অন্তঃস্থভাবে এবং দ্বিতীয় চিত্রে বহিঃস্থভাবে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AX : XB = AY : YC।

প্রমাণ। মনে কর, AB সরলরেখা X বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে। তাহা হইলে,

$$AX : XB = m : n।$$

∴ AX কে m সমান অংশে বিভক্ত করিলে XB কে তদ্রূপ n সমান অংশে বিভক্ত করা যাইবে।

AX কে m সমান অংশে এবং XB কে তদ্রূপ n সমান অংশে বিভক্ত করিয়া বিভাজিত বিন্দুগুলি দিয়া BCর সমান্তরাল সরলরেখাসমূহ টানা হইল।

তাহা হইলে উহারা AY ও YC কে যে সমুদয় অংশে বিভক্ত করে, তাহারা পরস্পর সমান।

এই সমান অংশগুলির ভিতর AY তে m অংশ এবং YC তে n অংশ রহিয়াছে।

$$\therefore \quad AY : YC = m : n$$

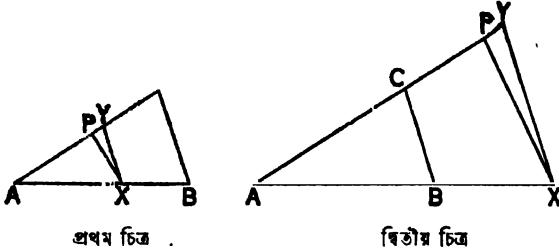
কিন্তু $AX : XB = m : n$ (কল্পনা)

$$\therefore \quad AX : XB = AY : YC।$$

উপপাদ্য 35

(উপ. 34 এর বিপরীত)

যদি কোন সরলরেখা ত্রিভুজের দুই বাহুকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে, তবে উহা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হইবে।

[If a line divides two sides of a triangle proportionally, it is parallel to the third side.]

প্রথম চিত্র . দ্বিতীয় চিত্র

XY সরলরেখা ABC ত্রিভুজের AB ও AC কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে প্রথম চিত্রে অন্তঃস্থভাবে এবং দ্বিতীয় চিত্রে বহিঃস্থভাবে সমান অনুপাতে বিভক্ত করিয়াছে ;

$\therefore$ AX : XB = AY : YC।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, XY, BCর সমান্তরাল।

প্রমাণ। যদি XY, BCর সমান্তরাল না হয়, তবে মনে কর যেন X দিয়া অঙ্কিত XP সরলরেখা BCর সমান্তরাল। তাহা হইলে,

AX : XB = AP : PC ; (উপ. 34).

কিন্তু কল্পনানুসারে, AX : XB = AY : YC।

$\therefore$ AP : PC = AY : YC।

তাহা হইলে AC সরলরেখা প্রথম চিত্রে অন্তঃস্থভাবে এবং দ্বিতীয় চিত্রে বহিঃস্থভাবে P এবং Y এই দুই বিন্দুতে একই অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে ; কিন্তু ইহা অসম্ভব (অনু. 35)।

কাজেই P, Yর সহিত এবং সেই হেতু XP, XYর সহিত মিলিয়া যাইবে।

$\therefore$ XY, BCর সমান্তরাল।

অনুসিদ্ধান্ত 1. XY ‖ BC হইলে, AX : AB = AY : AC হইবে।

[উপ. 34 এর চিত্রে, $\because \frac{AX}{XB}=\frac{AY}{YC}$ (উপ. 34), $\therefore \frac{XB}{AX}=\frac{YC}{AY}$

$$\therefore \frac{XB}{AX}+1=\frac{YC}{AY}+1, \text{ বা } \frac{XB+AX}{AX}=\frac{YC+AY}{AY},$$

$$\text{বা } \frac{AB}{AX}=\frac{AC}{AY}, \text{ বা } \frac{AX}{AB}=\frac{AY}{AC}$$

$\therefore$ AX : AB = AY : AC।]

অনুসিদ্ধান্ত 2. AX : AB = AY : AC হইলে, XY ∥ BC হইবে

[উপ. 34 এর চিত্রে, $\because \frac{AX}{AB}=\frac{AY}{AC}$, $\therefore \frac{AB}{AX}=\frac{AC}{AY}$

$$\therefore \frac{AB}{AX}-1=\frac{AC}{AY}-1, \text{ বা } \frac{AB-AX}{AX}=\frac{AC-AY}{AY}$$

$$\text{বা } \frac{XB}{AX}=\frac{YC}{AY}, \text{ বা } \frac{AX}{XB}=\frac{AY}{YC}$$

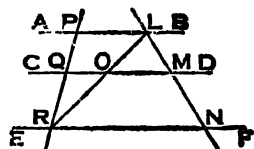
$\therefore$ XY ∥ BC. (উপ. 35)]

অনুশীলনী 24

1. ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া ভূমির সহিত সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখা অপর বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (C. U. 1923)

2. ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।

3. তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা যে কোন দুইটি ছেদককে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে। (C. U. 1915, '26, '39, '40)

[ইঙ্গিত : AB, CD ও EF সমান্তরাল সরলরেখাত্রয় PR ছেদক হইতে PQ ও QR এবং LN ছেদক হইতে LM ও MN ছিন্ন করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

PQ : QR = LM : MN।

LR যোগ কর ; উহা যেন CD কে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, PQ : QR = LO : OR

এবং LO : OR = LM : MN (উপ. 34),

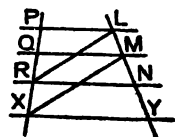
$\therefore$ PQ : QR = LM : MN।]

4. চারিটি সমান্তরাল সরলরেখা যে কোন দুইটি ছেদককে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।

[ইঙ্গিত : পার্শ্বের চিত্রে চারিটি সমান্তরাল সরলরেখা দুইটি ছেদক হইতে তিনটি করিয়া অংশ ছিন্ন করিয়াছে। LR ও MX যোগ কর।

এখন, PQ : QR = LM · MN (প্রশ্ন 3)।

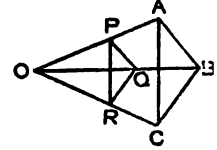
অনুরূপে, QR : RX = MN : NY।

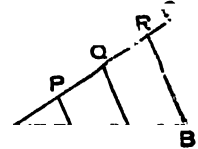
$\therefore$ PQ : QR : RX = LM : MN : NY।]

5. যে কোনও সংখ্যক সমান্তরাল সরলরেখা যে কোন দুইটি ছেদককে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।

6. OPA, OQB, ORC সরলরেখাত্রয়ের উপর বিন্দুগুলিকে এরূপে লওয়া হইয়াছে যে, PQ ∥ AB, QR ∥ BC এবং P, Q, R ও A, B, C একরেখীয় নহে। প্রমাণ কর যে, PR ∥ AC. (C. U. 1947)

[∵ PQ ∥ AB, OP : PA = OQ : OB,

∵ QR ∥ BC, OQ : QB = OR : RC

∴ OP : PA = OR : RC, ∴ PR ∥ AC.]

7. উপপাদ্য 34 এর সাহায্যে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে সমত্রিখণ্ডিত কর। (C. U. 1929)

[ইঙ্গিত : মনে কর, AB কে সমত্রিখণ্ডিত করিতে হইবে। যে কোন কোণ BAC আঁক। AC হইতে AP = PQ = QR কাটিয়া লও। RB যোগ কর। RBর সমান্তরাল PP_1 ও QQ_1 আঁক। উহারা যেন AB কে P_1 ও Q_1 বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে, $AP_1 = P_1Q_1 = Q_1B$ হইবে।

এখন, PP_1 RB, $\frac{AP_1}{AB} = \frac{AP}{AR} = \frac{1}{3}$,

$AP_1 = \frac{1}{3}AB.$

আবার, $PP_1 \parallel QQ_1$, $\frac{P_1Q_1}{AP_1} = \frac{PQ}{AP} = 1$,

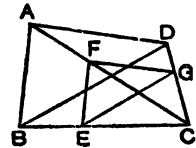
$\therefore P_1Q_1 = AP_1 = \frac{1}{3}AB.$

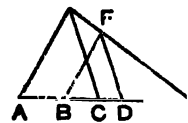
∴ অবশিষ্ট $Q_1B = \frac{1}{3}AB$. ∴ $AP_1 = P_1Q_1 = Q_1B$.]

8. ABC ও DBC ত্রিভুজদ্বয় একই BC ভূমির উপর একই পার্শ্বে অবস্থিত। BCর যে কোন বিন্দু E হইতে BAর সহিত সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত EF, ACকে F বিন্দুতে ছেদ করে এবং BDর সহিত সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত EG, DC কে G বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, FG ∥ AD.

[CE : EB = CF : FA (∵ EP ∥ BA)

এবং CE : EB = CG : GD (∵ EG ∥ BD);

∴ CF : FA = CG : GD, ∴ FG ∥ AD.]

9. A, B, C ও D চারিটি বিন্দু একটি সরলরেখার উপর পর পর অবস্থিত। সরলরেখাটির উপর একটি বিন্দু X নির্ণয় কর, যেন XA : XB = XC : XD হয়। (C. U. 1942)

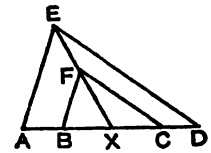
[A ও B দিয়া এক জোড়া এবং C ও D দিয়া আর এক জোড়া সমান্তরাল সরলরেখা আঁক। A ও C বিন্দুগামী সরলরেখা দুইটি যেন E বিন্দুতে এবং B ও D বিন্দুগামী সরলরেখা দুইটি যেন F বিন্দুতে ছেদ করিল।

EF যোগ করিয়া বর্ধিত কর ; উহা যেন A, B, C ও D বিন্দুগামী সরলরেখাকে X বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে, X নির্ণেয় বিন্দু হইবে।

প্রমাণ। ∵ AE ∥ BF, ∴ XA : XB = XE : XF.

আবার, ∵ CE ∥ DF, ∴ XE : XF = XC : XD.

∴ XA : XB = XC : XD.]

10. A, B, C ও D চারিটি বিন্দু একটি সরলরেখার উপর পর পর অবস্থিত। সরলরেখাটির উপর একটি বিন্দু X নির্ণয় কর, যেন XA : XB = XD : XC হয়।

[A ও B দিয়া এক জোড়া এবং C ও D দিয়া আর এক জোড়া সমান্তরাল সরলরেখা আঁক। A ও D বিন্দুগামী সরলরেখা দুইটি যেন E বিন্দুতে এবং B ও C বিন্দুগামী সরলরেখা দুইটি যেন F বিন্দুতে ছেদ করিল। EF যোগ করিয়া বর্ধিত কর ; উহা যেন A, B, C ও D বিন্দুগামী সরলরেখাকে X বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে, X নির্ণেয় বিন্দু হইবে। এখন, প্রশ্ন 9 এর ন্যায় প্রমাণ কর।]

11. ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহু দুইটির মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা উহার সমান্তরাল বাহু দুইটির সহিত সমান্তরাল।

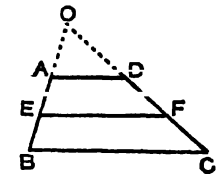
[**ইঙ্গিত :** ABCD ট্রাপিজিয়মের AB ও CD তির্যক বাহু এবং E ও F যথাক্রমে উহাদের মধ্যবিন্দু। বর্ধিত BA ও CD যেন O বিন্দুতে মিলিত হইল।

∵ AD ∥ BC ; OA : AB = OD : DC (উপ. 34)

∴ OA : 2AE = OD : 2DF,

∴ OA : AE = OD : DF,

∴ EF ∥ AD (উপ. 35)।

আবার, ∵ AD ∥ BC, ∴ EF ∥ BC.]

12. AB ও CD সমান্তরাল এবং CDর E মধ্যবিন্দু। যদি AC ও BE পরস্পরকে F বিন্দুতে এবং AE ও BD পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, AB ও FG সমান্তরাল।

13. ABC ত্রিভুজে ABর D মধ্যবিন্দু এবং CDর E মধ্যবিন্দু। বর্ধিত AE, BCকে F বিন্দুতে ছেদ করিলে দেখাও যে, FC = $\frac{1}{3}$BC. (D. B. 1939)

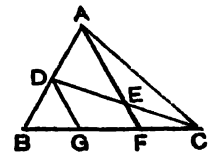
[**ইঙ্গিত :** AFএর সমান্তরাল DG টান ; উহা যেন BCর সহিত G বিন্দুতে মিলিত হইল।

এখন, BD : DA = BG : GF (উপ. 34) ;

কিন্তু BD = DA, ∴ BG = GF.

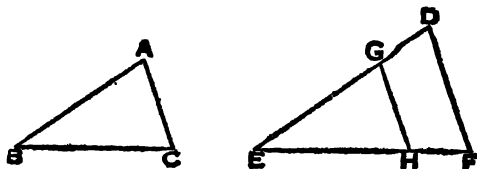
আবার, DE : EC = GF : FC (উপ. 34) ;

কিন্তু DE = EC, ∴ GF = FC.

∴ BG = GF = FC, ∴ FC = $\frac{1}{3}$BC.]

14. প্রশ্ন 13 এর সাহায্যে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে সমান তিন অংশে বিভক্ত কর।

উপপাদ্য 36

দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হইলে উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হইবে।

[If two triangles are equiangular, their corresponding sides are proportional.] (C. U. 1947, '48, '51 ; H. S. 1960, '62, '64)

ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$AB : DE = BC : EF = CA : FD.$$

প্রমাণ। ABC ত্রিভুজকে DEF ত্রিভুজের উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়ে এবং BC বাহু EF বাহুর উপর পড়ে।

এখন, $\because$ $\angle B = \angle E$, BA বাহু ED বাহুর উপর পড়িবে।

মনে কর যেন A বিন্দু G বিন্দুর উপর এবং C বিন্দু H বিন্দুর উপর পড়িল।

তাহা হইলে GEH ত্রিভুজ, ABC ত্রিভুজের নূতন অবস্থান।

$\therefore$ $\angle A = \angle EGH$.

আবার, $\angle A = \angle D$ (কল্পনা)

$\therefore$ $\angle EGH = \angle D$.

কিন্তু ইহারা অনুরূপ কোণ ; $\therefore$ $GH \parallel DF$.

$\therefore$ $EG : ED = EH : EF$; (অনুসিদ্ধান্ত 1, উপ. 35)

$\therefore$ $AB : DE = BC : EF$.

এইরূপে, C বিন্দুকে F বিন্দুর উপর এবং CB ও CA কে যথাক্রমে FE ও FD র উপর স্থাপন করিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

$$BC : EF = CA : FD$$

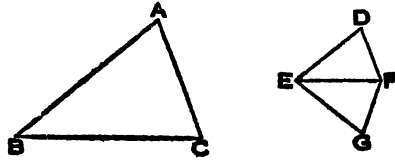
$\therefore$ $AB : DE = BC : EF = CA : FD$.

উপপাদ্য 37

(উপ. 36 এর বিপরীত)

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির তিন বাহু যথাক্রমে অপরটির তিন বাহুর সমানুপাতী হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী হইবে।

[If two triangles have their sides proportional, when taken in order, the triangles are equiangular.]

(C. U. 1942, '45 ; H. S. 1963)

ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের

AB : DE = BC : EF = CA : FD.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

E বিন্দুতে ∠Bর সমান করিয়া ∠FEG আঁক।

F বিন্দুতে ∠Cর সমান করিয়া ∠EFG আঁক।

তাহা হইলে, তৃতীয় ∠A = তৃতীয় ∠G.

প্রমাণ। ABC ও GEF ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, (অঙ্কন)

∴ AB : GE = BC : EF. (উপ. 36)

কিন্তু কল্পনানুসারে, AB : DE = BC : EF ;

∴ AB : GE = AB : DE,

∴ GE = DE.

অনুরূপে, GF = DF.

∴ GEF ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের

GE = DE, GF = DF এবং EF = EF ;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের

∠B = ∠GEF = ∠DEF

এবং ∠C = ∠GFE = ∠DFE.

∴ তৃতীয় ∠A = তৃতীয় ∠D ,

∴ ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

মন্তব্য। দুইটি ত্রিভুজের কোণগুলি সদৃশ হইলে সমানুপাতী হয় (উপ. 36) এবং বাহুগুলি সমানুপাতী হইলে কোণগুলি সদৃশ হয় (উপ. 37)। সুতরাং দুইটি ত্রিভুজের শুধু কোণগুলি সদৃশ হইলেই অথবা শুধু বাহুগুলি সমানুপাতী হইলেই ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হইবে।

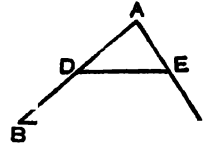
অনুশীলনী 25

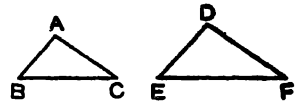
1. ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও তৃতীয় বাহুর অর্ধেক।

[ইঙ্গিত : ABC ত্রিভুজের ABর মধ্যবিন্দু D এবং ACর মধ্যবিন্দু E. DE যোগ কর।

এখন, $\because$ AD : DB = 1 = AE : EC, $\therefore$ DE ∥ BC.

আবার, ADE এবং ABC ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle D = \angle B$ এবং $\angle E = \angle C$, $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী ;

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}, \quad \therefore DE = \frac{1}{2}BC. \text{]}$$

2. দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের পরিসীমাদ্বয় উহাদের যে কোন দুইটি অনুরূপ বাহুর সমানুপাতী। (C. U. 1946)

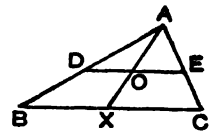
[ইঙ্গিত : ABC ও DEF সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$, $\therefore$ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী ;

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB+BC+AC}{DE+EF+DF} = \frac{\triangle ABC\text{এর পরিসীমা}}{\triangle DEF\text{এর পরিসীমা}} \text{ ।]}$$

3. ত্রিভুজের ভূমির সহিত সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত যে কোন সরলরেখা শীর্ষ হইতে ভূমির মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

[ইঙ্গিত : ABC ত্রিভুজের BC ভূমির সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা AX, BCর সহিত সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত DE কে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

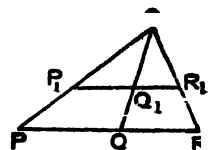
এখন, $\because$ DO ∥ BX, $\therefore$ ADO এবং ABX ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী,

$$\therefore \frac{DO}{BX} = \frac{AO}{AX}. \text{ তদ্রূপ, } \frac{OE}{XC} = \frac{AO}{AX};$$

$$\therefore \frac{DO}{BX} = \frac{OE}{XC}, \text{ কিন্তু } BX = XC; \therefore DO = OE. \text{]}$$

4. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা OP, OQ, OR সরলরেখাত্রয়কে যথাক্রমে P, Q, R এবং P_1, Q_1, R_1 বিন্দুগুলিতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, PQ : QR = $P_1Q_1 : Q_1R_1$. (C. U. 1941 ; G. U. 1940)

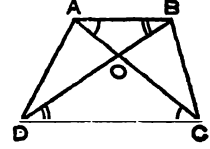
[ইঙ্গিত : $\because$ PQ ∥ P_1Q_1, $\therefore$ OPQ, OP_1Q_1 ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী,

$$\therefore \frac{PQ}{P_1Q_1} = \frac{OQ}{OQ_1}. \text{ তদ্রূপ, } \frac{QR}{Q_1R_1} = \frac{OQ}{OQ_1}.$$

$$\therefore \frac{PQ}{P_1Q_1} = \frac{QR}{Q_1P_1}, \quad \therefore \frac{PQ}{QR} = \frac{P_1Q_1}{Q_1R_1} \text{]}$$

5. ABCD ট্রাপিজিয়মের AB ও CD সমান্তরাল এবং উহার কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, OA : OC = OB : OD = AB : CD. (C. U. 1946 ; H. S. 1962)

[ইঙ্গিত : ∵ AB ∥ DC, ∠OAB = একান্তর ∠OCD এবং ∠OBA = একান্তর ∠ODC.

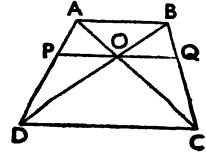
∴ OAB এবং OCD ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

∴ OA : OC = OB : OD = AB : CD.]

6. ABCD ট্রাপিজিয়মের AB ও DC সমান্তরাল। যদি AC ও BD কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O দিয়া এবং AB বা DCর সহিত সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত POQ সরলরেখা AD ও BC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, O বিন্দুতে PQ সমদ্বিখণ্ডিত হয়। (H. S. 1960, 1963)

[PO : DC = AO : AC (∵ △APO ও △ADC সদৃশকোণী)

= BQ : BC (∵ AB ∥ OQ)

= OQ : DC (∵ △BOQ ও △BDC সদৃশকোণী)

∴ PO = OQ ∴ PQ, O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।]

7. যদি কোন ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের একটি অপরটির দ্বিগুণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, উহার কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করে।

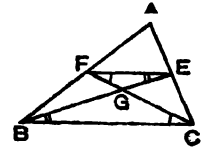
[প্রশ্ন 5 এর সাহায্যে প্রমাণ কর।]

8. ত্রিভুজের যে কোন দুইটি মধ্যমা পরস্পরকে সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করে।

[ইঙ্গিত : ABC ত্রিভুজের BE ও CF মধ্যমাদ্বয় পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন, FE ∥ BC (প্রশ্ন 1), ∴ GEF ও GBC ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী (প্রশ্ন 5 দেখ)।

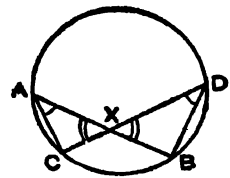
∴ $\frac{GE}{GB} = \frac{GF}{GC} = \frac{FE}{BC} = \frac{1}{2}$ (প্রশ্ন 1)

∴ GE = $\frac{1}{2}$GB এবং GF = $\frac{1}{2}$GC.

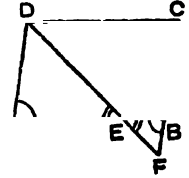
∴ মধ্যমাদ্বয়ের G সমত্রিখণ্ডক বিন্দু।]

9. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় পরস্পরকে সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করে।

[প্রশ্ন 8 এর সাহায্যে প্রমাণ কর।]

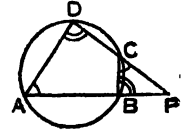
10. যদি কোন বৃত্তের অন্তর্গত যে কোন বিন্দু X দিয়া দুইটি জ্যা AB ও CD টানিয়া AC ও BD যোগ করা হয়, তবে দেখাও যে, AX : DX = CX : BX.

[ইঙ্গিতঃ CB চাপের উপর পরিধিস্থ ∠A = ∠D, ∠AXC = বিপ্রতীপ ∠BXD, ∴ AXC ও DXB সদৃশকোণী ; ইত্যাদি।]

11. যদি কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত করে, তবে একটির দুই অংশের অন্তর্গত আয়ত অপরটির দুই অংশের অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে। (C. U. 1951 ; H. S. 1962, '64 ; G. U. 1952)

12. ABCD একটি সামান্তরিক। D হইতে অঙ্কিত একটি সরলরেখা ABকে E বিন্দুতে এবং বর্ধিত CB কে F বিন্দুতে ছেদ করিল। দেখাও যে, DA : AE = FB : BE = FC : CD. (C. U. 1938)

[ইঙ্গিত: DAE, FBE ও FCD ত্রিভুজত্রয়ের
∠DAE = একান্তর ∠FBE = অনুরূপ ∠FCD এবং
∠AED = বিপ্রতীপ ∠BEF = অনুরূপ ∠CDF.
∴ ত্রিভুজত্রয় সদৃশকোণী।
∴ DA : AE = FB : BE = FC : CD.]

13. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। বর্ধিত AB ও DC পরস্পরকে বৃত্তের বাহিরে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, PB : PD = PC : PA.

(C. U. 1911, '48)

[ইঙ্গিত: ABCD চতুর্ভুজের
বহিঃস্থ ∠B = অন্তঃস্থ বিপরীত ∠D
এবং বহিঃস্থ ∠C = অন্তঃস্থ বিপরীত ∠A ;
∴ PCB ও PAD ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।
∴ PB : PD = PC : PA.]

14. বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD একটি চতুর্ভুজ এবং BD কর্ণ AC কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। দেখাও যে, AB.AD = CB.CD. (H. S. 1963)

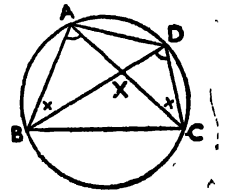
[ইঙ্গিত: AC ও BDর ছেদবিন্দু যেন X.
এখন, ABX ও DCX ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী,

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{AX}{DX}.$$

আবার, ADX ও BCX ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী,

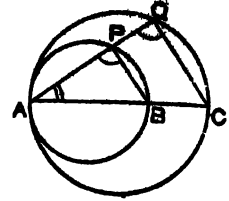
$$\therefore \frac{AD}{CB} = \frac{DX}{CX}.$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} \cdot \frac{AD}{CB} = \frac{AX}{DX} \cdot \frac{DX}{CX} = \frac{AX}{CX} = 1$$

∴ AB.AD = CB.CD.]

15. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে অন্তঃস্থভাবে (বা বহিঃস্থভাবে) স্পর্শ করে এবং A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত একটি সরলরেখা উহাদিগকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, উহাদের ব্যাসদ্বয়ের অনুপাত = AP : AQ.

[ইঙ্গিত : দুইটি বৃত্তের স্পর্শবিন্দু এবং কেন্দ্রদ্বয় এক-রেখীয় ; সুতরাং A এবং কেন্দ্রদ্বয় দিয়া একটি সরলরেখা টান। উহা যেন বৃত্তদ্বয়কে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল। PB ও QC যোগ কর।

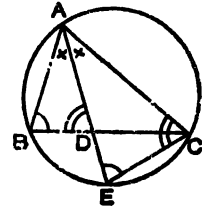
এখন, APB ও AQC ত্রিভুজদ্বয়ের সম ∠P = সম ∠Q অর্ধবৃত্তস্থ কোণ), ∠A সাধারণ ,

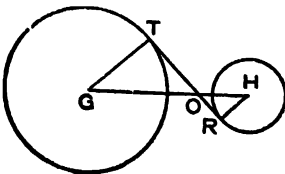
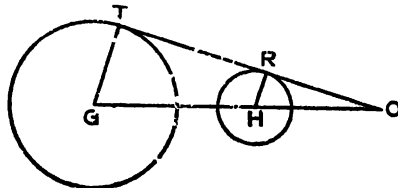
∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী , ইত্যাদি।]

16. ABC ত্রিভুজের A শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকে D বিন্দুতে এবং পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, AB.AC = AE AD. (C. U. 1937)

[ইঙ্গিত : EC যোগ কর। এখন, AC চাপের উপর পরিধিস্থ ∠B = ∠E এবং ∠BAD = ∠EAC (কল্পনা),

∴ ABD ও AEC ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী,

∴ AB : AE = AD : AC ,

∴ AB.AC = AE.AD.]

17. দুইটি বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক কেন্দ্রদ্বয়-সংযোজক সরলরেখাকে উহাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত করে।

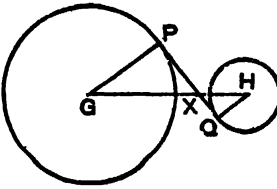
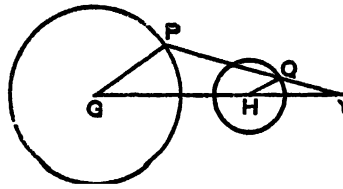
[ইঙ্গিত : মনে কর, G ও H কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক TR কেন্দ্রদ্বয়-সংযোজক সরলরেখাকে প্রথম চিত্রে অন্তঃস্থভাবে এবং দ্বিতীয় চিত্রে বহিঃস্থভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। GT ও HR যোগ কর।

প্রথম চিত্র দ্বিতীয় চিত্র

এখন, বৃত্তদ্বয়ের TR সাধারণ স্পর্শক, ∴ ∠GTO = ∠HRO (∵ প্রত্যেকে সমকোণ) এবং ∠GOT = বিপ্রতীপ ∠HOR, ∴ GTO এবং HRO সদৃশকোণী।

∴ GO : HO = GT : HR.]

18. প্রত্যেক বৃত্তে একটি করিয়া দুইটি ——— [illegible] পরিবর্তনশীল ব্যাসার্ধ টানিলে উহাদের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর কোন একটিতে ছেদ করিবে (C. U. 1917)

[G ও H কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয়ের GP ও HQ ব্যাসার্ধদ্বয় সমান্তরাল। PQ সরলরেখা GH কে প্রথম চিত্রে X বিন্দুতে অন্তঃস্থভাবে এবং দ্বিতীয় চিত্রে বর্ধিত GH কে Y বিন্দুতে বহিঃস্থভাবে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, X ও Y স্থির বিন্দু।

প্রথম চিত্র দ্বিতীয় চিত্র

প্রমাণ। ∵ GP ∥ HQ, ∴ প্রথম চিত্রে GPX ও HQX ত্রিভুজদ্বয় এবং দ্বিতীয় চিত্রে GPY ও HQY ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী। ∴ প্রথম চিত্রে GX : XH = GP : HQ এবং দ্বিতীয় চিত্রে GY · YH = GP : HQ এখন, GP ও HQ ব্যাসার্ধদ্বয়ের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য নিয়ত সমান বলিয়া, GP : HQ নিয়ত সমান, ∴ GX : XH এবং GY YH নিয়ত সমান। ∴ G ও H কেন্দ্রদ্বয় নির্দিষ্ট বলিয়া, X ও Y স্থিরবিন্দু।]

সংজ্ঞা। দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়-সংযোজক সরলরেখা যে দুই বিন্দুতে উহাদের ব্যাসার্ধের অনুপাতে বিভক্ত হয়, সেই বিন্দুদ্বয়কে ঐ বৃত্তদ্বয়ের **সাম্যকেন্দ্র** (Centres of Similitude) বলে।

19. বৃত্তের কোন জ্যা এর এক প্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর অপর প্রান্ত হইতে লম্ব টানিলে ঐ জ্যাটি বৃত্তের ব্যাস ও ঐ লম্বের মধ্য-সমানুপাতী হইবে। (C.U. 1920)

[ইঙ্গিত : মনে কর, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB একটি জ্যা, AC একটি ব্যাস AD স্পর্শক এবং AD র উপর BD লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AC : AB = AB . BD বা $AB^2 = AC.BD$. BC যোগ কর।

এখন, অর্ধবৃত্তস্থ ∠ABC = 1 সমকোণ,

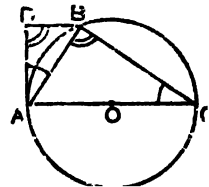
∴ ∠BAC + ∠BCA = 1 সমকোণ।

আবার, A বিন্দুতে AC ব্যাস ও AD স্পর্শক,

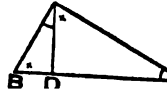
∴ ∠BAC + ∠BAD = 1 সমকোণ।

∴ ∠BCA = ∠BAD এবং অর্ধবৃত্তস্থ ∠ABC = ∠ADB (∵ প্রত্যেকে সমকোণ), ∴ ABC ও ADB ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

∴ AC : AB = AB : BD বা $AB^2 = AC.BD$.

B বিন্দুতে স্পর্শক এবং এই স্পর্শকের উপর AD লম্ব টানিয়া লইলেও একই প্রমাণ প্রযোজ্য হইবে।]

উপপাদ্য 38

কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর লম্ব টানিলে ত্রিভুজটি যে দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত হয়, তাহারা সমকোণী ত্রিভুজটির সহিত এবং পরস্পরের সহিত সদৃশ।

[If a perpendicular is drawn from the right angle of a right-angled triangle to the hypotenuse, the triangles on each side of the perpendicular are similar to the whole triangle and to one another.] (C. U. 1939, '43, '45 ; H. S, 1961, '62, '72)

BAC সমকোণী ত্রিভুজের ∠A সমকোণ এবং AD, BCর উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, BDA ও ADC ত্রিভুজদ্বয় BAC ত্রিভুজের সহিত এবং পরস্পরের সহিত সদৃশ।

প্রমাণ। BDA ও BAC ত্রিভুজদ্বয়ের

∠BDA = ∠BAC (প্রত্যেকে সমকোণ)

∠ABD = ∠ABC ∴ তৃতীয় ∠BAD = তৃতীয় ∠ACB

∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী ; ∴ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী ;

∴ ত্রিভুদ্বয় সদৃশ।

এইরূপে, প্রমাণ করা যায় যে, ADC ও BAC ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

আবার, BDA ও ADC ত্রিভুজদ্বয়ের

∠BAD = ∠ACD (প্রমাণিত)

∠ADB = ∠ADC (প্রত্যেকে সমকোণ)

∴ তৃতীয় ∠ABD = তৃতীয় ∠CAD

∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, ∴ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী ;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

∴ BDA ও ADC ত্রিভুজদ্বয় BAC ত্রিভুজের সহিত এবং পরস্পরের সহিত সদৃশ

অনুসিদ্ধান্ত। (1) চিত্রে BAC এবং BDA ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ ;

∴ BC : BA = BA : BD ∴ $BA^2 = BC.BD$ (H. S. 1960)

(2) চিত্রে BAC এবং ADC ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ ;

∴ CB : CA = CA : CD ∴ $CA^2 = CB.CD$.

(3) চিত্রে BDA এবং ADC ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,

∴ BD : AD = AD : DC ∴ $AD^2 = BD.DC$. (H. S. 1961)

অনুশীলনী 26

1. ABC সমকোণী ত্রিভুজের A সমকোণ এবং AD উচ্চতা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, BD ও DCর AD মধ্য-সমানুপাতী। (C. U. 1948)

2. APB বৃত্তের P বিন্দু হইতে AB ব্যাসের উপর লম্বের পাদবিন্দু N. প্রমাণ কর যে, $PB^2 = AB.NB$. (C. U. 1939)

3. যদি কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর লম্ব টানা যায় এবং যদি সমকোণী ত্রিভুজটির বাহুগুলি ক্রমিক সমানুপাতী হয়, তবে অতিভুজটির বৃহত্তর অংশ ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম বাহুর সমান হইবে। (C. U. 1939)

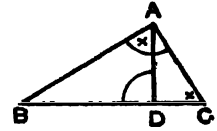
[ইঙ্গিত : ABC সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ A হইতে অতিভুজ BCর উপর AD লম্ব। ত্রিভুজটির অতিভুজ BC স্পষ্টতঃই বৃহত্তম বাহু ; সুতরাং AC যদি ক্ষুদ্রতম বাহু হয়, তবে দেওয়া আছে AC : AB = AB : BC. আবার, ADC সমকোণী ত্রিভুজের DC, অতিভুজ ACর সমান হইতে পারে না ; কাজেই প্রমাণ করিতে হইবে, BD = AC.

এখন, ∵ সমকোণ A হইতে অতিভুজ BCর উপর AD লম্ব ;

∴ ABD ও ABC ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

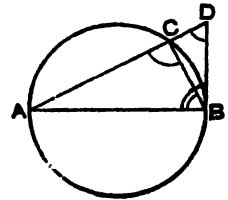
∴ BD : AB = AB : BC,

আবার, AC : AB = AB : BC (কল্পনা)

∴ BD = AC.]

4. কোন বৃত্তের AB একটি ব্যাস এবং A দিয়া অঙ্কিত যে কোন সরলরেখা বৃত্তটিকে C বিন্দুতে এবং B বিন্দুস্থ স্পর্শককে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, ADর সর্বাবস্থানে AC.AD ধ্রুবক।

[ইঙ্গিত : △ABDর B সমকোণ এবং অতিভুজ ADর উপর BC লম্ব। ∴ ACB ও ABD ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

∴ AC : AB = AB : AD, ∴ $AC.AD = AB^2$

কিন্তু ADর সর্বাবস্থানে AB ব্যাস নির্দিষ্ট বলিয়া, AB^2 নির্দিষ্ট। ∴ AC.AD নিয়ত সমান।]

5. যদি কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর লম্ব টানা যায়, তবে অতিভুজের অংশদ্বয়ের অনুপাত সমকোণসংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দ্বিগুণানুপাত হইবে।

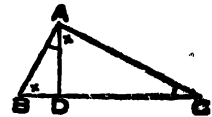
[ইঙ্গিত : ABC সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ A হইতে অতিভুজ BCর উপর AD লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

উপ. 33এর অনুসিদ্ধান্ত হইতে, $BC.BD = AB^2 \cdots (1)$

এবং $BC.DC = AC^2 \cdots (2)$

∴ (1) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া,

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2}$ অর্থাৎ $\frac{BD}{DC}$, $\frac{AB}{AC}$এর দ্বিগুণানুপাত (Duplicate ratio)।]

মন্তব্য 1. এই উপপাদ্যের সিদ্ধান্তটি নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায়

ABC ত্রিভুজের C কোণ সমকোণ হইলে,

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 ;$$

অর্থাৎ, AB, BC ও CAর দৈর্ঘ্য যদি যথাক্রমে, c, a ও b হয়, তবে $c^2 = a^2 + b^2$ ।

$\therefore$ $a^2 = c^2 - b^2$ এবং $b^2 = c^2 - a^2$ ।

অতএব, কোন সমকোণী ত্রিভুজেব দুই বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকিলে তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত। ABC সমকোণী ত্রিভুজের C কোণ সমকোণ এবং CO, ABর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, (1) $AC^2 = AO.AB$, (2) $BC^2 = BO\ AB$ এবং (3) $CO^2 = AO.OB$ ।

(1) $AC^2 =$ আয়ত $AL = AO.AE = AO.AB$ (উপ 39 এব চিত্র দেখ।)।

(2) $BC^2 =$ আয়ত $BL = BO\ BD = BO\ AB$ ।

(3) $CO^2 = AC^2 - AO^2 = AO\ AB - AO^2 = AO(AB - AO) = AO.OB$ ।

(C. U. 1900, '20, '35, '44, '47)

উপপাদ্য 40

(উপপাদ্য 39 এব বিপরীত)

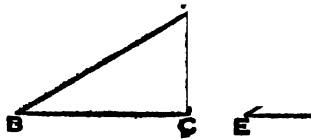
ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইলে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ সমকোণ হইবে।

[If the square described on one side f a triangle is equal to the sum of the squares described on the other two sides, then the angle contained by these two sides is a right angle Euc I 48]

(S F 1954, '56, '59, '62, '63, '66 '69)

ABC ত্রিভুজেব ABব উপব অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র

$=$ BC ও ACব উপব অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়েব সমষ্টি।

প্রমাণ কবিতে হইবে যে, $\angle ACB =$ এক সমকোণ।

অঙ্কন। BCব সমান কবিযা EF সবলবেখা টান ACব সমান করিয়া EF এর উপব FD লম্ব টান। DE যোগ কব।

প্রমাণ।

$AB^2 = BC^2 + AC^2$ (কল্পনা)

$= EF^2 + DF^2$ (অঙ্কন)

$= DE^2$, ($\because$ $\angle F = 1$ সমকোণ)

$\therefore$ $AB = DE$ ।

এখন, ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়েব $AB = DE$, $BC = EF$ এবং $AC = DF$,

$\because$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ $\angle ACB = \angle DFE$ ।

কিন্তু, $\angle DFE =$ এক সমকোণ. $\therefore$ $\angle ACB =$ এক সমকোণ।

মন্তব্য। এই উপপাদ্য হইতে আমরা দেখিতে পাই যে, যদি কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্যের কোন একটির বর্গ অপর দুইটির বর্গের সমষ্টির সমান হয়, তবে । যেমন, যে ত্রিভুজের বাহু তিনটি 3, 4 ও 5 একক, তাহা সমকোণী ; কারণ, $5^2 = 3^2 + 4^2$

37. সমকোণী ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের নিয়ম.

(ক) $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2$
$= (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2$,

অতএব, কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটি a^2+b^2, a^2-b^2 ও $2ab$ হইলে ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে। সুতরাং নিয়ম হইল :

নিয়ম। যে কোন দুইটি রাশির (1) বর্গের সমষ্টি, (2) বর্গের অন্তর ও (3) গুণফলের দ্বিগুণ লও। এই রাশি তিনটি সমকোণী ত্রিভুজের তিন বাহুর পরিমাণ হইবে।

যেমন, 3 ও 2 রাশি দুইটির (1) বর্গের সমষ্টি $= 3^2 + 2^2 = 13$, (2) উহাদের বর্গের অন্তর $= 3^2 - 2^2 = 5$ এবং (3) উহাদের গুণফলের দ্বিগুণ $= 2 \times 3 \times 2 = 12$। অতএব কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটি 13, 5 ও 12 হইলে ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে।

এইরূপ, a ও bর জন্য বিভিন্ন মান লইয়া বিভিন্ন সমকোণী ত্রিভুজের বাহুর পরিমাণ পাওয়া যাইবে।

অনুশীলনী 27

1. সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর যে কোন বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ।

2. কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ।

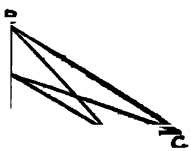
3. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর AD লম্ব। যদি AB > AC হয়, তবে $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$।

4. ABCD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$।

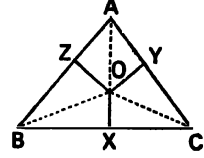
5. ABC ত্রিভুজের A কোণ সমকোণ এবং D, ACর উপর একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$।

[ইঙ্গিত : BD যোগ কর। এখন,
$AD^2 + BC^2 = (BD^2 - AB^2) + (AC^2 + AB^2)$
$= AC^2 + BD^2$ ।]

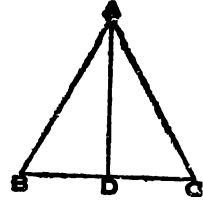
6. ABC ত্রিভুজের A কোণ সমকোণ। AB ও ACর উপর যথাক্রমে P ও Q দুইটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $BC^2 + PQ^2 = BQ^2 + CP^2$। (S. F. 1954, '62)

[ইঙ্গিত : PQ, BQ, CP যোগ কর। এখন,
$BC^2 + PQ^2 = (AB^2 + AC^2) + (AP^2 + AQ^2)$ [উপ. 39]
$= (AB^2 + AQ^2) + (AC^2 + AP^2)$
$= BQ^2 + CP^2$ (উপ. 39)।]

7. ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ O একটি বিন্দু। OX, OY ও OZ যথাক্রমে BC, CA ও ABর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে,
$AZ^2+BX^2+CY^2=AY^2+CX^2+BX^2$। (C.U. 1904; S.F.1959, '63, '70)

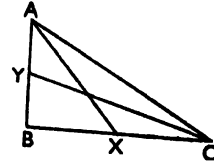
[ইঙ্গিত: OA, OB ও OC যোগ কর।

এখন, $AZ^2+BX^2+CY^2$
$=AO^2-OZ^2+BO^2-OX^2+CO^2-OY^2$
$=AO^2-OY^2+CO^2-OX^2+BO^2-OZ^2$
$=AY^2+CX^2+BZ^2$।]

8. সমবাহু ত্রিভুজের উন্নতির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের চারি গুণ, উহার এক বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিন গুণের সমান। (C. U. 1933)

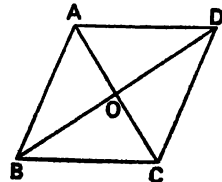
[ইঙ্গিত: ABC সমবাহু ত্রিভুজের AD একটি উন্নতি
এখন,

$4AD^2=4AB^2-4BD^2$
$=4AB^2-(2BD)^2$
$=4AB^2-BC^2$
$=3AB^2$।]

9. সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয় হইতে অঙ্কিত মধ্যমাদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির চারি গুণ অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের পাঁচ গুণের সমান। (D. B. 1930; S. F. 1969)

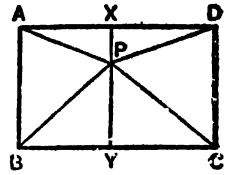
[ইঙ্গিত: ABC ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ এবং সূক্ষ্মকোণদ্বয় হইতে AX ও CY দুইটি মধ্যমা।

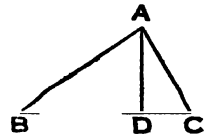
এখন, $4AX^2+4CY^2$
$=4AB^2+4BX^2+4BY^2+4BC^2$
$=4AB^2+(2BX)^2+(2BY)^2+4BC^2$
$=4AB^2+BC^2+AB^2+4BC^2$
$=5(AB^2+BC^2)=5AC^2$।]

10. রম্বসের চারি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রগুলির সমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান। (S. F. 1966)

[ইঙ্গিত: ABCD রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।
এখন, $\because$ রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে,

$\therefore$ $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=(OA^2+OB^2)+(OB^2+OC^2)+(OC^2+OD^2)+(OD^2+OB^2)=2(OA^2+OB^2+OC^2+OD^2)=2(OA^2+OB^2+OA^2+OB^2)$ [$\because$ OA=OC এবং OB=OD] $=4OA^2+4OB^2=(2OA)^2+(2OB)^2=AC^2+BD^2$।]

11. ABCD আয়তের A, B, C ও D কে P একটি বিন্দুর সহিত যোগ করা হইল। প্রমাণ কর যে, $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$। (C. U. 1921 ; S. F. 1954)

[ইঙ্গিত : P দিয়া ABর সমান্তরাল XY রেখা টান, উহা যেন AD ও BCর সহিত যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে মিলিত হইল।

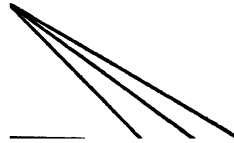
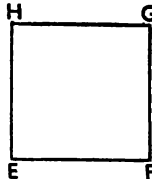
এখন, $PA^2+PC^2=AX^2+XP^2+YC^2+YP^2$
$=BY^2+XP^2+XD^2+YP^2$
$=BY^2+YP^2+XP^2+XD^2$
$=PB^2+PD^2$।]

12. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ A হইতে BC ভূমির উপর AD লম্ব। যদি $AD^2=BD.DC$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী। (S. F. 1956)

[ইঙ্গিত : $AB^2+AC^2=BD^2+AD^2+AD^2+DC^2$
$=BD^2+BD.DC+BD.DC+DC^2$
$=BD(BD+DC)+DC(BD+DC)$
$=BD.BC+DC.BC$
$=BC(BD+DC)=BC.BC=BC^2$;

∴ ∠BAC সমকোণ (উপ. 40] ∴ ত্রিভুজটি সমকোণী।]

সম্পাদ্য 10

একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ, ত্রিগুণ, চতুগু ণ ইত্যাদি ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw squares whose areas shall respectively be twice, thrice, four times...that of a given square.]

EFGH একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র। ইহার দ্বিগুণ, ত্রিগুণ, চতুর্গুণ ইত্যাদি ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। OX একটি সরলরেখা লও। OX এর উপর OY লম্ব টান। OX ও OY হইতে EF এর সমান করিয়া যথাক্রমে OA ও OP কাটিয়া লও এবং PA যোগ কর। PAর সমান করিয়া OB কাটিয়া লও এবং PB যোগ কর। PBর সমান করিয়া OC কাটিয়া লও এবং PC যোগ কর।

তাহা হইলে PA, PB ও PCর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল যথাক্রমে EFGH বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ, ত্রিগুণ ও চতুর্গুণ হইবে।

প্রমাণ। $PA^2=OP^2+OA^2=EF^2+EF^2=2EF^2$,
$PB^2=OP^2+OB^2=OP^2+PA^2$ (অঙ্কন)
$=EF^2+2EF^2=3EF^2$,
$PC^2=OP^2+OC^2=OP^2+PB^2$ (অঙ্কন)
$=EF^2+3EF^2=4EF^2$।

এইরূপে, EFGH বর্গক্ষেত্রের 5, 6, 7, 8 ইত্যাদি গুণ ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করা যাইতে পারে।

মন্তব্য 1. যদি $EF=1$ হয়, তবে $PA^2=2.1^2=2$ এবং $PA=\sqrt{2}$। এইরূপ, $PB=\sqrt{3}$, $PC=\sqrt{4}$ ইত্যাদি হইবে। সুতরাং কোন সীমাবদ্ধ সরলরেখাকে 1 ধরিয়া যে কোন পূর্ণসংখ্যার বর্গমূল সরলরেখা দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

মন্তব্য 2. OAর দৈর্ঘ্য 1 সেমি. হইলে কর্ণমাপনী দ্বারা PA, PB ইত্যাদির দৈর্ঘ্য মাপিয়া $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ইত্যাদির মান দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত এবং রুলার দ্বারা মাপিয়া এক দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করা যায়।

অনুশীলনী 28

1. দুইটি বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

2. একটি বর্গক্ষেত্রের তিন গুণ একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

3. একটি বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

[ইঙ্গিত : AB যেন প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রটির একটি বাহু। ABকে ব্যাস লইয়া একটি অর্ধবৃত্ত আঁক। ABর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক OC যেন অর্ধ-পরিধিকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। AC, BC যোগ কর। এখন $\triangle AOC \equiv \triangle BOC$ (স্বতঃসিদ্ধ) ;

$\therefore AC=BC$। $\therefore AC^2=\frac{1}{2}(AC^2+BC^2)=\frac{1}{2}AB^2$
($\because$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ACB সমকোণ)।

$\therefore$ AC বা BCর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রই উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র হইবে।]

4. দুইটি সমবাহু ত্রিভুজের অন্তরের সমান একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁক।

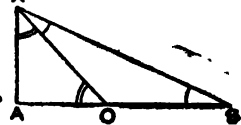
[ইঙ্গিত : ABC সমকোণী ত্রিভুজটি আঁক, যাহার B সমকোণ, $AC=$ প্রদত্ত বৃহত্তর সমবাহু ত্রিভুজটির এক বাহু এবং $AB=$ প্রদত্ত ক্ষুদ্রতর সমবাহু ত্রিভুজটির এক বাহু। BDC সমবাহু ত্রিভুজটি আঁক। উহাই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে। প্রমাণ পরে শিখিবে।]

5. দুইটি বর্গক্ষেত্রের অন্তরের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

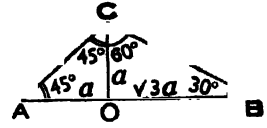
[প্রশ্ন 4এর অঙ্কন প্রণালী অবলম্বন কর।]

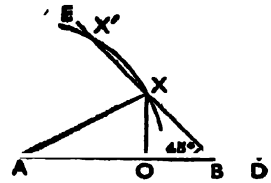
6. একটি সরলরেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন এক অংশের উপর বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ হয়। [S. F. 1957]

AB যেন গৃহীত সরলরেখা। ABর উপর AX লম্ব টান। ABর সহিত $22\frac{1}{2}^\circ$ কোণ করিয়া BX টান ; উহা যেন AX এর সহিত X বিন্দুতে মিলিত হইল। ABX কোণের সমান করিয়া BXO কোণ আঁক। XO যেন ABর সহিত O বিন্দুতে মিলিত হইল। তাহা হইলে $OB^2=2AO^2$ হইবে।

প্রমাণ। $OB^2=OX^2$ ($\because \angle OBX=\angle OXB$)
$=AO^2+AX^2=2AO^2$ ($\because \angle AOX=22\frac{1}{2}^\circ+22\frac{1}{2}^\circ=45^\circ$ এবং $\angle AXO=90^\circ-45^\circ=45^\circ$ বলিয়া $AX=AO$.)

7. একটি সরলরেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন এক অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিন গুণ হয়।

AB যেন গৃহীত সরলরেখা। $\angle BAC = 45^\circ$ এবং $\angle ABC = 30^\circ$ আঁক। ABর উপর CO লম্ব আঁক। তাহা হইলে $OB^2 = 3AO^2$ হইবে।

প্রমাণ। $OA = a$ হইলে $OC = a$, $CB = 2a$ ($\because$ COB সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ CB, 30° পরিমিত B কোণের বিপরীত OCর দ্বিগুণ) এবং $OB = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$. $\therefore$ $OB^2 = (\sqrt{3}a)^2 = 3a^2 = 3AO^2$.

8. একটি সরলরেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন উহাদের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

AB যেন গৃহীত সরলরেখা এবং নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রটির CD একটি বাহু। 45° পরিমিত $\angle ABE$ আঁক। A কে কেন্দ্র এবং CD কে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক, উহা যেন BE কে X ও X′ বিন্দুতে ছেদ করিল। ABর উপর XO (বা X′O) লম্ব টান। তাহা হইলে $OA^2 + OB^2 = CD^2$ হইবে।

প্রমাণ। $OA^2 + OB^2 = OA^2 + OX^2$

($\because$ $\angle OXB = 90^\circ - \angle B = 45^\circ$) $= AX^2 = CD^2$.

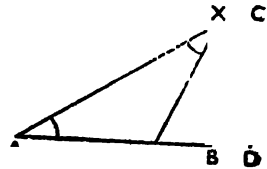
9. একটি সরলরেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তর একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

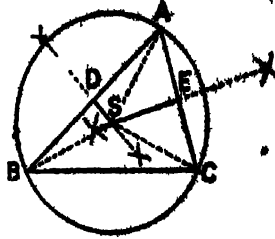
AB যেন গৃহীত সরলরেখা এবং নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রটির CD একটি বাহু। 90° পরিমিত $\angle ABX$ আঁক। CDর সমান করিয়া BX লও। AX যোগ কর। $\angle A$র সমান করিয়া $\angle AXO$ আঁক; XO যেন ABর সহিত O বিন্দুতে মিলিত হইল।

তাহা হইলে $OA^2 - OB^2 = CD^2$ হইবে।

প্রমাণ। $OA^2 - OB^2 = OX^2 - OB^2$

$= XB^2 = CD^2$.

সম্পাদ্য [illegible]

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

To draw a circle about a given triangle. [illegible]

ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।

ইহার পরিবৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। ABর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক DS এবং ACর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক ES অঙ্কিত কর। যেন পরস্পর S বিন্দুতে ছেদ করিল।

S কে কেন্দ্র করিয়া এবং SA কে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে এই বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। SA, SB, SC যোগ কর।

SDA ও SDB ত্রিভুজদ্বয়ের DA = DB (অঙ্কন), DS = DS এবং ∠SDA ∠SDB (প্রত্যেকে সমকোণ)

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম, ∴ SA = SB।

আবার, SEA ও SEC ত্রিভুজদ্বয়ের

EA = EC (অঙ্কন), ES = ES এবং ∠SEA = ∠SEC (প্রত্যেকে সমকোণ)

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম,

∴ SA = SC

∴ SA = SB = SC,

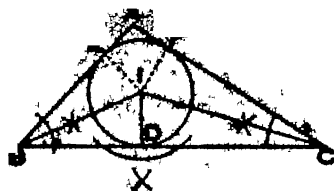
∴ S কে কেন্দ্র এবং SA কে ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C দিয়া যাইবে।

∴ উহাই ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত।

মন্তব্য। সূক্ষ্মকোণী ও স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র যথাক্রমে ত্রিভুজের ভিতরে ও বাহিরে থাকিবে এবং সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু হইবে।

সম্পাদ্য 12

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a circle in a given triangle.] (C U 1923)

ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।
ইহার অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। ∠ABCর সমদ্বিখণ্ডক BI এবং ∠ACBর সমদ্বিখণ্ডক। তাহারা যেন পরস্পর I বিন্দুতে মিলিত হইল।

I বিন্দু হইতে BCর উপর ID লম্ব টান। I কে কেন্দ্র করিয়া এবং ID কে লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে এই বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। AB ও ACর উপর যথাক্রমে IE ও IF লম্ব টান।

IBD ও IBE ত্রিভুজদ্বয়ের

∠IBD = ∠IBE (অঙ্কন), IB = IB

এবং ∠IDB = ∠IEB (প্রত্যেকে সমকোণ)

ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ID = IE।

আবার, IDC ও IFC ত্রিভুজদ্বয়ের ∠ICD = ∠ICF (অঙ্কন), IC = IC

এবং ∠IDC = ∠IFC (প্রত্যেকে সমকোণ) ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম

ID = IF, ∴ ID = IE = IF।

I কে কেন্দ্র এবং ID কে ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি D, E ও F দি যাইবে।

আবার, ∵ BC, AB ও AC যথাক্রমে ID, IE ও IF ব্যাসার্ধের উপ D, E ও F বিন্দুতে লম্ব,

∴ BC, AB ও AC যথাক্রমে বৃত্তটিকে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করিবে (উপ 30)

∴ অঙ্কিত বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত।

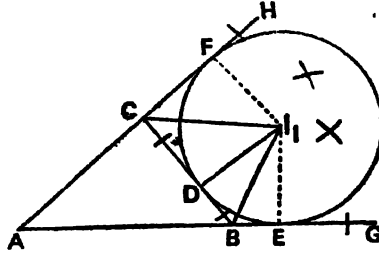
অনুসিদ্ধান্ত 1 ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু এবং উহাদে সম্পাত বিন্দু ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

অনুসিদ্ধান্ত 2. ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র উহার বাহুগুলি হইতে সমদূরবর্তী।

(S. F.

সম্পাদ্য 13

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের একটি বহির্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw an escribed circle of a given triangle.]

ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।

মনে কর, উহার এমন একটি বহির্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা BC বাহুকে . বর্ধিত AB ও AC বাহুকে স্পর্শ করিবে।

অঙ্কন। AB ও AC কে যথাক্রমে G ও H বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর।

$\angle$CBGর সমদ্বিখণ্ডক BI_1 এবং $\angle$BCH এর সমদ্বিখণ্ডক CI_1 অঙ্কিত কর। রা যেন পরস্পর I_1 বিন্দুতে মিলিত হইল।

I_1 বিন্দু হইতে BCর উপর I_1D লম্ব টান। I_1 কে কেন্দ্র করিয়া এবং I_1D কে সার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে এই বৃত্তটি উদ্দিষ্ট বহির্বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। AG ও AH এর উপর যথাক্রমে I_1E ও I_1F লম্ব টান।

I_1BD ও I_1BE ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle I_1BD = \angle I_1BE$ (অঙ্কন), $I_1B = I_1B$

এবং $\angle I_1DB = \angle I_1EB$ (প্রত্যেকে সমকোণ)

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম, $\therefore$ $I_1D = I_1E$।

অনুরূপে, $I_1D = I_1F$; $\therefore$ $I_1D = I_1E = I_1F$।

$\therefore$ I_1 কে কেন্দ্র এবং I_1D কে ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত D, E ও F দিয়া যাইবে।

আবার. $\because$ BC, AG ও AH যথাক্রমে I_1D, I_1E ও I_1F ব্যাসার্ধের উপর D, E ও বিন্দুতে লম্ব ;

$\therefore$ BC, AG ও AH যথাক্রমে বৃত্তটিকে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করিবে (উপ. 30)।

$\therefore$ অঙ্কিত বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের উদ্দিষ্ট বহির্বৃত্ত।

মন্তব্য। প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বহির্বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত। ত্রিভুজের দুইটি কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডকদ্বয় এবং তৃতীয় কোণের দ্বিখণ্ডক সমবিন্দু, এবং উহাদের সম্পাত বিন্দুটি ত্রিভুজের একটি বহিঃকেন্দ্র।

অনুশীলনী 29

(ত্রিভুজ ও বৃত্ত বিষয়ক)

1. একটি ত্রিভুজের তিন বাহু 5 সে.মি., 3·5 সে.মি. ও 3 সে.মি.। ত্রিভুজটি পরিবৃত্ত, অন্তর্বৃত্ত ও একটি বহির্বৃত্ত অঙ্কিত কর।

2. ABC ত্রিভুজের O অন্তঃকেন্দ্র। যদি AB=4 সে.মি., BC=6 সে.মি. এব CA=8 সে.মি. হয়, তবে OAর দৈর্ঘ্য মাপিয়া বাহির কর।

3. একই ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত এবং সমান শিরঃকোণবিশিষ্ট যাবতী ত্রিভুজের একই পরিবৃত্ত।

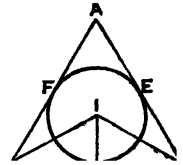
[∵ ত্রিভুজসমূহের ভূমির দুই প্রান্ত এবং শীর্ষসমূহ একই চাপের উপর অবস্থি থাকে।]

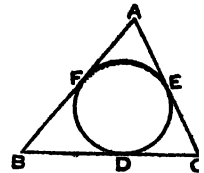
4. নির্দিষ্ট ভূমি ও নির্দিষ্ট শিরঃকোণবিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহের পরিকেন্দ্র একটি নির্দি বিন্দু। [কারণ, ত্রিভুজসমূহের একই পরিবৃত্ত (প্রশ্ন 3)।]

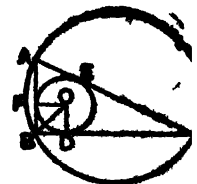
5. সমবাহু ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলিকে স্পর্শবিন্দুে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[ABC সমবাহু ত্রিভুজের I কেন্দ্রীয় অন্তর্বৃত্ত ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। IB, IC ও ID যোগ কর। এখন, IBD ও ICD ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle IBD = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ACB = \angle ICD$, সমকোণ IDB = সমকোণ IDC (উপ, 30) এবং ID = ID,

∴ BD = CD ; ∴ স্পর্শবিন্দু D, BCর সমদ্বিখণ্ডক।

এইরূপ, স্পর্শবিন্দু E ও F যথাক্রমে AC ও ABর সমদ্বিখণ্ডক।]

6. কোন ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত কোন বাহুকে স্পর্শবিন্দুতে যে দুই অংশে বিভক্ত করে তাহাদের অন্তর ত্রিভুটির অপর দুই বাহুর অন্তরের সমান।

[ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। এখন, DB ~ DC = FB ~ EC(উপ. 32) = (AF + FB) ~ (AE + EC) = AB ~ AC।]

7. সমকোণী ত্রিভুজের অন্তর্ব্যাস ও পরিব্যাসের সমষ্টি, সমকোণসংলগ্ন বাহুদ্বয়ে সমষ্টির সমান।

[ABC ত্রিভুজের ∠B সমকোণ। উহার অন্তর্বৃত্তের O কেন্দ্র এবং অন্তর্বৃত্তটি *a*, *b* ও *c* কে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

এখন, ODBF একটি বর্গক্ষেত্র,

∴ অন্তর্বৃত্তের ব্যাস = OD + OF = BF + BD।

আবার, পরিবৃত্তের ব্যাস = AC = AE + CE = AF + CD (উপ. 32);

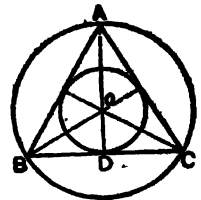
∴ অন্তর্বৃত্তের ব্যাস + পরিবৃত্তের ব্যাস = BF + BD + AF + CD = AB + BC।

8. সমবাহু ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ অন্তর্ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ। (C. U. 1910)

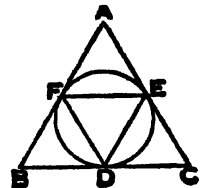
[ABC সমবাহু ত্রিভুজের OD অন্তর্ব্যাসার্ধ এবং OB পরিব্যাসার্ধ।

এখন, OBD সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B = 30°$ এবং $\angle O = 60°$,

$\therefore$ OD $= \frac{1}{2}$OB (প্রশ্ন 5, অনুশীলনী 2)

$\therefore$ OB $=$ 2OD।]

9. কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ দুইটির বাহু যথাক্রমে a ও b হইলে $b^2 = 4a^2$ হইবে। (C. U. 1880)

[DEF বৃত্তে DEF অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজ এবং D, E ও F দিয়া অঙ্কিত স্পর্শক দ্বারা গঠিত ABC পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ।

এখন, সমবাহু ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলিকে স্পর্শ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে (প্রশ্ন 5), $\therefore$ F, ABর এবং E, ACর মধ্যবিন্দু। $\therefore$ FE $= \frac{1}{2}$BC, (উপ. 9) $\therefore$ BC $=$ 2FE। $\therefore$ FE $= a$ এবং BC $= b$ হইলে, $b = 2a$; $\therefore$ $b^2 = 4a^2$।]

10. ABC ত্রিভুজের I অন্তঃকেন্দ্র, এবং r অন্তর্ব্যাসার্ধ। প্রমাণ কর যে,

$\triangle IBC = \frac{1}{2}ar$, $\triangle ICA = \frac{1}{2}br$, $\triangle IAB = \frac{1}{2}cr$ এবং $\triangle ABC = \frac{1}{2}(a+b+c)r$।

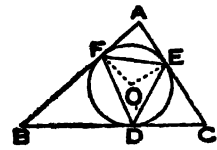
11. ABC ত্রিভুজের A কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তের r_1 ব্যাসার্ধ। প্রমাণ কর যে, $\triangle ABC = \frac{1}{2}(b+c-a)r_1$।

12. ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত বাহুগুলিকে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করে। প্রমাণ কর যে, DEF ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে $90° - \frac{1}{2}\angle A$, $90° - \frac{1}{2}\angle B$, $90° - \frac{1}{2}\angle C$।

[O যেন বৃত্তটির কেন্দ্র। OE, OF যোগ কর।

পরিধিস্থ $\angle EDF = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle EOF$

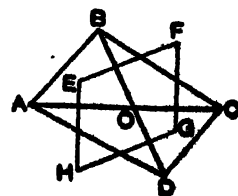
$= \frac{1}{2}(180° - \angle A)$

$= 90° - \frac{1}{2}\angle A$; ইত্যাদি।]

13. ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের I কেন্দ্র এবং A কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তের I_1 কেন্দ্র। প্রমাণ কর যে I, B, I_1, C একবৃত্তস্থ।

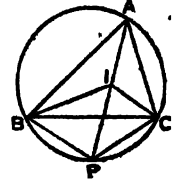
[$\angle ICI_1 = \angle IBI_1 = 90°$; $\therefore$ I, B, I_1, C একবৃত্তস্থ।]

14. ABCD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের O ছেদবিন্দু। প্রমাণ কর যে OAB, OBC, OCD ও ODA ত্রিভুজ চতুষ্টয়ের পরিকেন্দ্রগুলি একটি সামান্তরিকের চারিটি কৌণিক বিন্দু।

[OA, OB, OC ও ODর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকগুলির ছেদবিন্দু যেন E, F, G ও H।

তাহা হইলে ত্রিভুজ চারিটির পরিকেন্দ্র E, F, G ও H। প্রমাণ করিতে হইবে যে, EFGH একটি সামান্তরিক। এখন, EF ∥ GH ($\because$ উহারা BDর উপর লম্ব)। অনুরূপে, EH ∥ FG ; $\therefore$ EFGH একটি সামান্তরিক।]

15. ABC ত্রিভুজের I অন্তঃকেন্দ্র ; বর্ধিত AI ত্রিভুজটির পরিবৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, PI = PB = PC।

[BI, CI, PB ও PC যোগ কর। এখন, BAI ত্রিভুজের বহিঃ $\angle PIB = \angle IBA + \angle IAB$; কিন্তু $\angle IBA = \angle IBC$ (∵ BI, $\angle ABC$র সমদ্বিখণ্ডক). এবং $\angle IAB = \angle IAC$ (∵ AI, $\angle BAC$র সমদ্বিখণ্ডক) = $\angle PAC$ = একবৃত্তাংশস্থ $\angle PBC$। ∴ $\angle PIB = \angle IBC + \angle PBC = \angle PBI$, ∴ PI = PB।

আবার, ∵ $\angle PAB = \angle PAC$, ∴ PB চাপ = PC চাপ, ∴ PB জ্যা = PC জ্যা (স্বতঃ 2)। ∴ PI = PB = PC।]

সম্পাদ্য 14

তিনটি সরলরেখা দেওয়া আছে; উহাদের চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the *fourth proportional* to three given straight lines.]

তিনটি সরলরেখা L, M, N দেওয়া আছে ; উহাদের চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন। PAQ একটি কোণ আঁক। AQ হইতে L এর সমান AB এবং M এর সমান BC লও। AP হইতে N এর সমান AD লও।

BD যোগ কর। BDর সমান্তরাল CE টান ; উহা যেন APর সহিত E বিন্দুতে মিলিত হইল। তাহা হইলে L, M ও N এর চতুর্থ সমানুপাতী DE হইবে।

প্রমাণ। ACE ত্রিভুজের CE বাহু, BDর সমান্তরাল ;

∴ AB : BC = AD : DE (উপ. 34)

কিন্তু AB = L, BC = M এবং AD = N, ∴ L : M = N : DE

∴ L, M ও N এর চতুর্থ সমানুপাতী DE।

সম্পাদ্য 15

দুইটি সরলরেখা দেওয়া আছে; উহাদের তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the *third proportional* to two given straight lines.]

দুইটি সরলরেখা L ও M দেওয়া আছে ; উহাদের তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

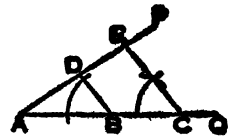
অঙ্কন। PAQ একটি কোণ আঁক।

AQ হইতে L এর সমান AB এবং M এর সমান BC লও। AP হইতে M এর সমান AD লও।

BD যোগ কর BDর সমান্তরাল CE টান ; উহা যেন APর সহিত E বিন্দুতে মিলিত হইল। তাহা হইলে L ও M এর তৃতীয় সমানুপাতী DE হইবে।

প্রমাণ। ACE ত্রিভুজের CE বাহু, BDর সমান্তরাল ;

∴ AB : BC = AD : DE, বা L : M = M : DE

∴ L ও M এর তৃতীয় সমানুপাতী DE।

সম্পাদ্য 16

দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

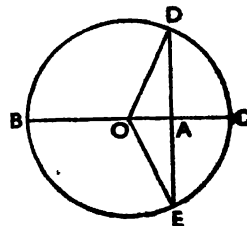
[To find the *mean proportional* between two given straight lines.] (H. S. 1964)

AB ও AC দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। উহাদের মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রথম প্রণালী

অঙ্কন। AB ও AC কে পরস্পরের বিপরীত দিকে একই সরলরেখায় স্থাপন কর। BC কে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। O কে কেন্দ্র করিয়া এবং OB বা OC কে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। BCর উপর AD লম্ব আঁক; উহা যেন বৃত্তটির সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইল।

D B O A C E

তাহা হইলে AD সরলরেখা, AB ও ACর মধ্য সমানুপাতী হইবে।

প্রমাণ। DA কে বর্ধিত কর; উহা যেন বৃত্তটির সহিত E বিন্দুতে মিলিত হইল।

OD ও OE যোগ কর।

এখন, OAD এবং OAE সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

অতিভুজ OD = অতিভুজ OE ($\because$ ব্যাসার্ধ) এবং OA = OA;

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম; $\therefore$ AD = AE।

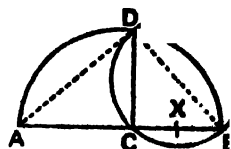
এখন, BC ও DE জ্যাদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ $AB.AC = AD.AE = AD.AD = AD^2$।

$\therefore$ AD সরলরেখা, AB ও ACর মধ্য সমানুপাতী।

দ্বিতীয় প্রণালী

অঙ্কন। AB ও AC কে একই দিকে একই সরলরেখায় স্থাপন কর। AB কে ব্যাস লইয়া এক অর্ধবৃত্ত আঁক। ABর উপর CD লম্ব টান; উহা যেন অর্ধপরিধির সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইল। AD যোগ কর। AB হইতে ADর সমান করিয়া AX লও।

D X A C B

তাহা হইলে AX সরলরেখা, AB ও ACর মধ্য সমানুপাতী হইবে।

প্রমাণ। BD যোগ কর। BD কে ব্যাস লইয়া একটি বৃত্ত আঁক।

এখন, BCD সমকোণ বলিয়া, BD কে ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত C দিয়া যাইবে।

আবার, অর্ধবৃত্তস্থ $\angle ADB$ সমকোণ বলিয়া, BD ব্যাসবিশিষ্ট BCD বৃত্তের D বিন্দুতে AD স্পর্শক।

$\therefore$ $AB.AC = AD^2 = AX^2$।

$\therefore$ AX সরলরেখা, AB ও ACর মধ্য সমানুপাতী।

টীকা। ∵ $AB.AC = AX^2$; ∴ AB.ACর বর্গমূল $= AX$, যাহা AB ও ACর মধ্য সমানুপাতী ∴ $AB = 7$ এবং $AC = 4$ হইলে, 7.4 বা 28 এর বর্গমূল হইবে AB ও ACর মধ্য সমানুপাতী AX এর সাংখ্যমান ; সুতরাং AX কে মাপিয়া $\sqrt{28}$ এর সাংখ্যমান পাওয়া যাইবে। 28 এর উৎপাদক 1 ও 28 অথবা 2 ও 14 লইয়াও 28এর বর্গমূল নির্ণয় করা যায়। কিন্তু উৎপাদক দুইটিকে কাছাকাছি সংখ্যা লইলে অঙ্কনকার্যে সুবিধা হয়। যেমন 20 এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে 4 ও 5 এবং 23 এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে 2·3 ও 10 লওয়া সুবিধাজনক। ছক-কাগজের 1 সেন্টিমিটারকে 1 ধরিয়া অঙ্কন করিলে, রুলার দ্বারা মাপিয়া প্রথম দশমিক স্থান পর্যন্ত এবং কর্ণমাপনী দ্বারা মাপিয়া দ্বিতীয় দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল সঠিকভাবে পাওয়া যায়।

অনুশীলনী 30

অঙ্কন দ্বারা নির্ণয় কর :

1. 2 সে. মি., 3 সেমি. ও 4 সে. মি. এর চতুর্থ সমানুপাতী কত ? উঃ 6 সে.মি.
2. 4·8 সে.মি. ও 7·2 সে. মি. এর তৃতীয় সমানুপাতী কত ? উঃ 10·8 সে. মি.
3. 4 ও 9 এর মধ্য সমানুপাতী কত ? উঃ 6
4. দুই সরলরেখার দৈর্ঘ্য 7·5 সে.মি. ও 10·8 সে.মি.; উহাদের মধ্য সমানুপাতী কত ? উঃ 9 সে. মি.
5. 7·2 সে.মি. দীর্ঘ সরলরেখাকে 1 : 2 : 3এর অনুপাতে বিভক্ত কর।
উঃ 1·2 সে. মি., 2·4 সে. মি., 3·6 সে.মি.
6. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে 3 : 1 এর অনুপাতে (i) অন্তঃস্থভাবে এবং (ii) বহিঃস্থভাবে বিভক্ত কর। [অনুচ্ছেদ 34 এর উদাহরণ দেখ।]
7. 3·2 সে.মি. দীর্ঘ একটি সরলরেখাকে 5 : 3 এর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করিলে প্রত্যেক স্থলে অংশগুলির দৈর্ঘ্য কত হইবে ?
উঃ 2 সে.মি., 1·2 সে. মি., 8 সে. মি., 4·8 সে. মি.
8. 24 ও 43 এর বর্গমূল এক দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। উঃ 4·8 ও 5·6.

[illegible]

[illegible]

ক্ষেত্রফল

আয়তের ক্ষেত্রফল। আমরা জানি, আয়তের

দৈর্ঘ্যের সাংখ্যমান × প্রস্থের সাংখ্যমান = ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান

সংক্ষেপে, দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = ক্ষেত্রফল ;

∴ দৈর্ঘ্য = ক্ষেত্রফল ÷ প্রস্থ,

প্রস্থ = ক্ষেত্রফল ÷ দৈর্ঘ্য।

আয়তের সীমাকল = 2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ), আয়তের কর্ণ = $\sqrt{\text{দৈর্ঘ্য}^2 + \text{প্রস্থ}^2}$।

উদাহরণ। 27 মিটার দীর্ঘ এবং 18 মিটার প্রশস্ত একটি উঠান 1 মিটার 5 ডেসিমিটার বর্গ প্রস্তর দ্বারা বাঁধিতে কতগুলি প্রস্তরের আবশ্যক হইবে? প্রত্যেকখানি প্রস্তরের মূল্য 3 টাকা 50 পয়সা হইলে ঐ উঠান বাঁধিতে কত মূল্যের প্রস্তর লাগিবে?

উঠানের ক্ষেত্রফল = (27 × 18) ব. মি. = 486 ব. মি

প্রতি প্রস্তরের ক্ষেত্রফল = ($1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2}$) ব. মি. = $\frac{9}{4}$ ব. মি.

∴ প্রস্তরের সংখ্যা = 486 ব. মি. ÷ $\frac{9}{4}$ ব. মি. = 486 × $\frac{4}{9}$ = 216.

∴ নির্ণেয় মূল্য = $3\frac{1}{2}$ টাকা × 216 = ($\frac{7}{2}$ × 216) টাকা = 756 টাকা।

প্রশ্নমালা 1

1. 96 মিটার দীর্ঘ এবং 72 মিটার প্রশস্ত একটি আয়তাকার মাঠের এক কোণ হইতে বিপরীত কোণ পর্যন্ত চলিলে কত পথ চলা হইবে?

2. একটি রোলারের বিস্তার 2 মি. 5 ডেসিমি. এবং পরিধি 3 মি. 2 ডেসিমি.। উহা 5 বার আবর্তন করিলে কত বর্গ মিটার স্থান অতিক্রম করিবে?

3. একটি আয়তাকার উঠানের পরিসীমা 56 মিটার এবং দৈর্ঘ্য প্রস্থের $2\frac{1}{2}$ গুণ। উঠানটির ক্ষেত্রফল কত?

4. একটি আয়তাকার উদ্যানের দৈর্ঘ্য 48 মিটার এবং প্রস্থ 35 মিটার। ইহার ভিতরে চারিদিকে 2 মি. 5 ডেসিমি. বিস্তৃত একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ক্ষেত্রফল কত?

5. একটি আয়তাকার জলাশয়ের দৈর্ঘ্য 75 মিটার এবং প্রস্থ 60 মিটার। উহার চারিদিকে 3 মি. 5 ডেসিমি. প্রশস্ত একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ক্ষেত্রফল কত?

6. 80 মিটার দীর্ঘ এবং 42 মিটার প্রশস্ত একটি প্রাঙ্গণকে সমান আকারের বর্গাকার পাথর দ্বারা বাঁধাইতে হইবে। যদি পাথরের আকার যথাসম্ভব বৃহত্তম হয়, তবে ঐ প্রাঙ্গণ বাঁধাইতে কতগুলি পাথর লাগিবে?

7. প্রতি বর্গ মিটারে 2 টাকা 50 পয়সা হিসাবে একটি ঘরের মেঝে সিমেন্ট করিতে 375 টাকা লাগিল। ঘরটির দৈর্ঘ্য 15 মিটার হইলে প্রস্থ কত ?

8. 20 মিটার দীর্ঘ একটি ঘরের মেঝে সিমেন্ট করিতে 480 টাকা লাগিল। ঘরটির প্রস্থ 5 মিটার কম হইলে 330 টাকা লাগিত। ঘরটির প্রস্থ কত ?

9. একটি ঘরের ক্ষেত্রফল 192 বর্গ মিটার। উহার প্রস্থ 3 মিটার অধিক হইলে ক্ষেত্রফল 240 বর্গ মিটার হইত। ঘরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

10. একখানি লোহার পাতের দৈর্ঘ্য 7 মি. 5 ডেসিমি. এবং প্রস্থ 2 মি. 4 ডেসিমি.। উহার দৈর্ঘ্য কত কমাইলে অবশিষ্টাংশের ক্ষেত্রফল 6 বর্গ মিটার হইবে ?

11. ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার করিয়া চলিলে এক ব্যক্তি একটি আয়তের একধার 48 মিনিটে এবং চারিধার 4 ঘণ্টায় অতিক্রম করিতে পারে। আয়তটির ক্ষেত্রফল কত ?

12. 120 মিটার দীর্ঘ এবং 80 মিটার বিস্তৃত একটি আয়তাকার বাগানের দুই সন্নিহিত পার্শ্বের মধ্যস্থল হইতে 4 মিটার প্রশস্ত দুইটি রাস্তা বিপরীত দুই পার্শ্বের মধ্যস্থল পর্যন্ত সোজা গিয়াছে। প্রতি বর্গ মিটারে 1 টাকা $37\frac{1}{2}$ পয়সা হিসাবে ঐ রাস্তা দুইটি প্রস্তুত করিতে কত লাগিবে ?

2. বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ পরস্পর সমান,

∴ **বর্গক্ষেত্রের বাহুর বর্গ = বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল**

∴ **বর্গক্ষেত্রের বাহু = ক্ষেত্রফলের বর্গমূল।**

বর্গক্ষেত্রের সীমাফল = এক বাহু × 4, বর্গক্ষেত্রের কর্ণ = এক বাহু × $\sqrt{2}$.

উদাহরণ। একটি আয়তের দৈর্ঘ্য প্রস্থের $2\frac{1}{2}$ গুণ এবং ক্ষেত্রফল 640 বর্গ মিটার; উহার দৈর্ঘ্য কত ?

আয়তটির প্রস্থের সমান বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 640 বর্গ মিটার ÷ $2\frac{1}{2}$ = 640 বর্গ মিটার × $\frac{2}{5}$ = 256 বর্গ মিটার।

∴ আয়তটির প্রস্থ = $\sqrt{256}$ মিটার = 16 মিটার

∴ আয়তটির দৈর্ঘ্য = 16 মিটার × $2\frac{1}{2}$ = 40 মিটার।

প্রশ্নমালা 2

1. একটি বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল 1 হে.মি.^{2} 20 মি.^{2} 1 ডেসিমি.^{2}; উহার পরিসীমা কত ?

2. একটি আয়তের ক্ষেত্রফল 1 হে.মি.^{2} 44 ডেকামি.^{2} 6 মি.^{2} এবং দৈর্ঘ্য প্রস্থের $1\frac{1}{2}$ গুণ। আয়তটির দৈর্ঘ্য কত ?

3. একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 9 ব. ডেকামি.। ইহার বাহিরে চারিদিকে 2 মি. 5 ডেসিমি. বিস্তৃত একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ক্ষেত্রফল কত ?

4. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 20 ডেকামি.^{2} 16 মি.^{2} এবং দৈর্ঘ্য প্রস্থের [illegible] গুণ। উহার ভিতরে চারিদিকে 2 মিটার বিস্তৃত একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির [illegible] কত ?

5. একটি আয়তের দৈর্ঘ্য 90 মিটার এবং দৈর্ঘ্য প্রস্থের $2\frac{1}{4}$ গুণ। আয়তটির ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা কত ?

6. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 48 মিটার এবং উহার প্রস্থ দৈর্ঘ্যের $\frac{3}{4}$ আয়তটির সীমাফলের সমান সীমাফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রকে 8 ডেসিমি. বর্গ পাথর দ্বারা বাঁধাইতে কতখানি পাথর লাগিবে ?

7. একটি আয়তাকার উঠানের দৈর্ঘ্য প্রস্থের $1\frac{1}{2}$ গুণ। উহা বাঁধাইতে $1\frac{1}{2}$ মিটার বর্গ পাথরের 600 খানি লাগিল। উঠানটির দৈর্ঘ্য কত ?

8 একটি মাঠের দৈর্ঘ্য প্রস্থের $2\frac{1}{2}$ গুণ। প্রতি বর্গ মিটারে 50 পয়সা হিসাবে মাঠটি সমতল করিতে 2000 টাকা লাগিল। প্রতি মিটারে 7 টাকা 50 পয়সা হিসাবে মাঠটির চারিদিকে লোহার বেড়া দিতে কত খরচ লাগিবে ?

9. দুইটি বর্গক্ষেত্রের মোট ক্ষেত্রফল 656 বর্গ মিটার। একটির বাহু অপরটির $\frac{4}{5}$ হইলে, প্রত্যেকটির বাহু কত ? [বড়টির বাহু x মিটার হইলে, ছোটটির বাহু $\frac{4}{5}x$ মিটার, $\therefore\ x^2+\frac{16}{25}x^2=656$.]

10. একটি বর্গাকার বাগানের চারিধারে 5 মিটার প্রশস্ত একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ক্ষেত্রফল 10 বর্গ ডেকামিটার হইলে বাগানটির ক্ষেত্রফল কত ?

[বাগানটির এক ধার x মিটার হইলে, $(x+5\times2)^2-x^2=1000$.]

3 **দেওয়ালের ক্ষেত্রফল।** একটি আয়তাকার ঘরের চারিটি দেওয়ালকে যদি এক সরলরেখাক্রমে পাশাপাশি রাখা সম্ভবপর হয়, তবে দেওয়াল চারিটি এমন একটি আয়তাকার দেওয়ালে পরিণত হইবে, যাহার দৈর্ঘ্য হইবে ঘরের সীমাফলের সমান এবং প্রস্থ হইবে ঘরের উচ্চতার সমান। সুতরাং,

চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল = ঘরের সীমাফল × উচ্চতা

= 2(দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) × উচ্চতা

অর্থাৎ, ঘরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের যোগফলের দ্বিগুণকে উচ্চতা দিয়া গুণ করিলে চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়।

∵ সীমাফল × উচ্চতা = দেওয়ালের ক্ষেত্রফল,

∴ **সীমাফল = দেওয়ালের ক্ষেত্রফল ÷ উচ্চতা**

এবং উচ্চতা = দেওয়ালের ক্ষেত্রফল ÷ সীমাফল।

উদাহরণ। একটি ঘরের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থের $1\frac{1}{2}$ গুণ। প্রতি বর্গ মিটারে 1 টাকা 20 পয়সা হিসাবে ঘরটির দেওয়ালগুলি রং করিতে 240 টাকা লাগিল এবং প্রতি বর্গ মিটারে 2 টাকা 50 পয়সা হিসাবে ঘরটির মেঝে সিমেন্ট করিতে 375 টাকা লাগিল। ঘরটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা কত ?

দেওয়ালগুলির ক্ষেত্রফল = (240 টা. ÷ $1\frac{1}{5}$ টা.) মি.^{2} = 200 মি.^{2}।

মেঝের ক্ষেত্রফল = (375 টা. ÷ $2\frac{1}{2}$ টা.) মি.^{2} = 150 মি.^{2},

∴ ঘরটির প্রস্থের সমান বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 150 মি.^{2} ÷ $1\frac{1}{2}$

= 100 মি.^{2};

ঘরের প্রস্থ = $\sqrt{100}$ মি. = 10 মি. এবং দৈর্ঘ্য = [illegible]

∴ ঘরের পরিসীমা = 2(দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) = 2(15 মি. + 10 মি.) = [illegible]

∴ ঘরের উচ্চতা = (দেওয়ালের ক্ষেত্রফল ÷ ঘরের পরিসীমা)

= 200 মি.^{2} ÷ 50 মি. = 4 মি.।

∴ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য = 15 মি., প্রস্থ = 10 মি. ও উচ্চতা = 4 মি.।

প্রশ্নমালা 3

1. একটি ঘরের মেঝের ও ভিতরদিকের ছাদের ক্ষেত্রফল একত্রে উহার চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফলের সমান। ঘরটির দৈর্ঘ্য 10 মিটার এবং প্রস্থ 6 মিটার হইলে ঘরটির উচ্চতা কত ?

2. একটি বর্গাকার ঘরের দৈর্ঘ্য 8 মিটার। প্রতি বর্গ মিটারে 50 পয়সা হিসাবে ঘরটির দেওয়ালগুলি কাগজ দ্বারা মুড়িতে 64 টাকা লাগিল। ঘরটির উচ্চতা কত ?

3. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য 12 মিটার এবং উচ্চতা 4 মিটার। প্রতি বর্গ মিটারে 25 পয়সা হিসাবে ঘরটির চারি দেওয়াল রং করিতে 34 টাকা লাগিল। ঘরটির প্রস্থ কত ?

4. 5 মিটার উচ্চ একটি ঘরের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ। উহার চারি দেওয়াল $1\frac{1}{2}$ মিটার ওসারের কাগজ দ্বারা মুড়িতে 160 মিটার কাগজ লাগে। ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল কত ?

5. একটি ঘরের চারিটি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল 180 বর্গ মিটার, মেঝের ক্ষেত্রফল 80 বর্গ মিটার এবং দৈর্ঘ্য 10 মিটার। ঘরটির প্রস্থ ও উচ্চতা কত ?

6. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থের $3\frac{1}{2}$ গুণ। ঘরটির উচ্চতা 5 মিটার এবং দেওয়ালের ক্ষেত্রফল 270 বর্গ মিটার। ঘরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

7. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থের $2\frac{1}{2}$ গুণ। প্রতি বর্গ মিটারে 75 পয়সা হিসাবে ঘরটির দেওয়ালগুলি রং করিতে 210 টাকা লাগিল এবং প্রতি বর্গ মিটারে 3 টাকা 50 পয়সা হিসাবে উহার মেঝে সিমেন্ট করিতে 560 টাকা লাগিল। ঘরটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা কত ?

8. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য 6 মি., প্রস্থ 5 মি. এবং উচ্চতা 4 মি. 5 ডেসিমি.। উহার দেওয়ালে 2 মি. উচ্চ ও 1 মি. 5 ডেসিমি. প্রশস্ত 2টি দরজা এবং 1 মি. 5 ডেসিমি. উচ্চ ও 1 মি. 2 ডেসিমি. প্রশস্ত 5টি জানালা আছে। প্রতি বর্গ মিটারে 75 পয়সা হিসাবে দেওয়ালগুলি কাগজ দ্বারা মুড়িতে কত খরচ লাগিবে ?

[দরজা ও জানালা বাদে অবশিষ্টাংশ কাগজ দ্বারা মুড়িতে হইবে বুঝিবে।]

4. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

(1) একই ভূমির উপর অবস্থিত একটি ত্রিভুজের ও একটি আয়তের উচ্চতা সমান হইলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল আয়তটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হয় ;

∴ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা ;

∴ ভূমি = 2 × ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ÷ উচ্চতা,

উচ্চতা = 2 × ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ÷ ভূমি।

(2) [illegible]
[illegible] সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = ½ [illegible]

(3) ABC সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু a এবং BC [illegible] AD [illegible] হইলে, (উচ্চতা)^2 বা $AD^2 = AB^2 - (\frac{1}{2}BC)^2 = a^2 - (\frac{1}{2}a)^2 = \frac{3}{4}a^2$

$\therefore$ উচ্চতা $= \frac{1}{2}\sqrt{3}a.$

$\therefore$ সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}\sqrt{3}a$

$= \frac{1}{4}\sqrt{3}$ (বাহু)^2 ।

(4) যে কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকিলে নিম্নের সূত্রটির সাহায্যে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

যে কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক,
যেখানে s = অর্ধপরিসীমা এবং a, b ও c তিন বাহুর দৈর্ঘ্য।

উদাহরণ 1. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 15 মিটার এবং অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর 3 মিটার, অপর বাহু দুইটি নির্ণয় কর।

মনে কর, অপর বাহুদ্বয়ের ছোটটি a মি.। তাহা হইলে অপরটি $(a+3)$ মি.।

$\therefore \quad a^2 + (a+3)^2 = 15^2$ বা, $a^2 + a^2 + 6a + 9 = 225$

বা, $2a^2 + 6a - 216 = 0$ বা, $a^2 + 3a - 108 = 0$

বা, $(a+12)(a-9) = 0 \quad \therefore a = -12$ অথবা 9

কিন্তু বাহুর দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হইতে পারে না ; $\therefore a = 9$

$\therefore$ এক বাহুর দৈর্ঘ্য = 9 মিটার

এবং অপর বাহুর দৈর্ঘ্য $= (a+3)$ মিটার = 12 মিটার।

উদাহরণ 2 একটি সমবাহু ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বাহুগুলির উপর পতিত লম্বত্রয় যথাক্রমে 1, 2 ও 3 মিটার। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য ও ক্ষেত্রফল কত?

মনে কর, ত্রিভুজটির বাহু $= a$ মিটার। তাহা হইলে,

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(1.a + 2.a + 3.a)$ ব. মি. $= 3a$ ব. মি. এবং সূত্র হইতে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$ ব. মি.

$\therefore \quad \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2 = 3a$ বা, $\frac{1}{4}a^2 = \sqrt{3}a \quad \therefore a = 4\sqrt{3}.$

$\therefore$ ত্রিভুজটির বাহু $= a$ মিটার $= 4\sqrt{3}$ মিটার এবং

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}\sqrt{3} \times (4\sqrt{3})^2$ ব. মি. $= 12\sqrt{3}$ ব. মি.।

প্রশ্নমালা 4

1. একটি ত্রিভুজের ভূমি 2 ডেকামি. 5 ডেসিমি. এবং উচ্চতা 2 মি. 4 সে.মি., উহার ক্ষেত্রফল কত?

2. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণসংলগ্ন দুই বাহু 3 ডেকামি. 7 মি. 5 ডেসিমি. এবং 6 ডেকামি. 4 মি. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

3. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 5 ডেকামি. 2 মি. এবং সমকোণসংলগ্ন এক বাহু 4 ডেকামি. 8 মি. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

4. একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অতিভুজ $12\sqrt{2}$ মিটার। উহার ক্ষেত্রফল কত ?

5. একটি সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহু 8 মিটার ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

6. একটি ত্রিভুজের তিন বাহু 2 ডেকামি., 4 ডেকামি. 8 মি. এবং 5 ডেকামি. 2 মি. ; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

7. একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 17 ডেকামি.^{2} 70 মি.^{2} এবং ভূমি 2 ডেকামি. 3 মি. 6 ডেসিমি. । উহার উচ্চতা কত ?

8. একটি সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহু 2 মি. 4 ডেসিমি. ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

9. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি 24 মিটার এবং সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটি 20 মিটার ; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

10. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 20 মিটার এবং অপর দুই বাহুর অন্তর 4 মিটার। অপর বাহু দুইটি কত ?

11. একটি সমকোণী ত্রিভুজের পরিসীমা 30 মিটার এবং অতিভুজ 13 মিটার। অপর বাহু দুইটি কত ?

12. একটি সমকোণী ত্রিভুজের এক বাহু 12 মিটার এবং অতিভুজ ও অপর বাহুর সমষ্টি 36 মিটার। অতিভুজ ও অপর বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

13. একটি সমবাহু ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় যথাক্রমে 5, 6 ও 7 মিটার। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য ও ক্ষেত্রফল কত ?

14. 10 মিটার দীর্ঘ একটি মই কোন দেওয়ালের গায়ে খাড়াভাবে রহিয়াছে। উহার নিম্নপ্রান্ত দেওয়াল হইতে কতটা সরাইলে অপর প্রান্ত 4 মিটার নামিয়া পড়িবে ?

15. একটি আয়তাকার তৃণক্ষেত্র হইতে 5 মিটার দূরে 13 মিটার দীর্ঘ রজ্জুদ্বারা একটি গরু বাঁধা হইল। তৃণক্ষেত্রটির এক প্রান্তসীমা বরাবর গরুটি কতটা দীর্ঘস্থানের তৃণ খাইতে পারিবে ?

16. 25 মিটার উচ্চ একটি তালগাছ ঝড়ে ভাঙ্গিয়া যাওয়ায় উহার অগ্রভাগ গাছটির সহিত সংলগ্ন থাকিয়া উহার মূল হইতে 5 মিটার দূরে ভূমি স্পর্শ করিল। গাছটি কত উচ্চে ভাঙ্গিয়াছিল ?

17. একটি মন্দির হইতে 80 মিটার দূরবর্তী কোন স্থানে মন্দিরটির যে সম্মুখকোণ ছিল, মন্দিরের দিকে সোজাভাবে 50 মিটার চলিবার পর মন্দিরটির সম্মুখকোণ তাহার দ্বিগুণ হইল। মন্দিরটির উচ্চতা কত ?

18. কোন সরোবরে একটি কমলকলিকার উপর প্রান্ত জলতল হইতে 4 সেন্টিমিটার উপরে ছিল। বাতাসে চালিত হইয়া উপর প্রান্তটি পূর্বস্থান হইতে 36 সেন্টিমিটার দূরে জলতলের সহিত মিলিয়া গেল। জলের গভীরতা কত ?

বৃত্ত

4. বৃত্তের পরিধি। যে কোন বৃত্তের পরিধি উহার ব্যাসের নির্দিষ্ট সংখ্যক গুণ। এই গুণক সংখ্যাটিকে কোন খণ্ড বা অখণ্ড সংখ্যাদ্বারা সঠিকভাবে প্রকাশ করা যায় না। গুণক সংখ্যাটিকে গ্রীক অক্ষর π (পাই) দ্বারা প্রকাশ করা হইয়া থাকে।

$$\therefore \frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}}=\pi, \text{ বা } \frac{\text{পরিধি}}{2\times\text{ব্যাসার্ধ}}=\pi$$

$\therefore$ পরিধি $=\pi\times$ ব্যাস, বা পরিধি $=2\pi\times$ ব্যাসার্ধ ;

$\therefore$ ব্যাস $=$ পরিধি $\div\pi$ এবং ব্যাসার্ধ $=$ পরিধি $\div 2\pi$.

π এর মান $\frac{22}{7}$ অপেক্ষা একটু ছোট। চারি দশমিক স্থান পর্যন্ত π এর শুদ্ধমান 3·1416.

উদাহরণ 1. একটি বৃত্তাকার মাঠকে উহার ব্যাস বরাবর অতিক্রম করিতে এক ব্যক্তির যত সময় লাগে, অর্ধ-পরিধি বরাবর অতিক্রম করিতে তাহা অপেক্ষা 48 সেকেণ্ড অধিক লাগে। ঐ ব্যক্তির গতিবেগ প্রতি মিনিটে 80 মিটার হইলে মাঠটির পরিধি কত ?

মনে কর, মাঠটির ব্যাসার্ধ $=r$. তাহা হইলে, উহার অর্ধ-পরিধি $=\pi r=\frac{22}{7}r$ এবং ব্যাস $=2r$. $\therefore$ প্রদত্ত সর্তানুসারে, ঐ ব্যক্তি 48 সেকেণ্ডে $(\frac{22}{7}r-2r)$ বা $\frac{8}{7}r$ অতিক্রম করে।

আবার, ঐ ব্যক্তি প্রতি মিনিটে 80 মিটার হিসাবে 48 সেকেণ্ডে অতিক্রম করে 80 মিটার $\times\frac{48}{60}$ বা 64 মিটার।

$\therefore \frac{8}{7}r=64$ মিটার, $\therefore r=56$ মিটার ;

$\therefore$ নির্ণেয় পরিধি $=2\pi r=2\times\frac{22}{7}\times 56$ মিটার $=352$ মিটার।

উদাহরণ 2. একটি বৃত্তাকার পথকে বাহিরের প্রান্ত দিয়া অতিক্রম করিতে এক ব্যক্তির 50 সেকেণ্ড লাগে এবং ভিতরের প্রান্ত দিয়া অতিক্রম করিতে 40 সেকেণ্ড লাগে। পথটির পরিসর 8 মিটার হইলে বাহিরের প্রান্ত দ্বারা গঠিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত ?

মনে কর, বাহিরের প্রান্ত দ্বারা গঠিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=r$ মিটার। তাহা হইলে, ভিতরের প্রান্ত দ্বারা গঠিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=(r-8)$ মিটার।

প্রথম বৃত্তের পরিধি $=2\pi r$ মিটার ; $\therefore$ ঐ ব্যক্তি প্রতি সেকেণ্ডে অতিক্রম করে $2\pi r$ মিটার $\div 50$ বা $\frac{1}{25}\pi r$ মিটার।

দ্বিতীয় বৃত্তের পরিধি $=2\pi(r-8)$ মিটার ; $\therefore$ ঐ ব্যক্তি প্রতি সেকেণ্ডে অতিক্রম করে $2\pi(r-8)$ মিটার $\div 40=\frac{1}{20}\pi(r-8)$ মিটার।

ঐ ব্যক্তি উভয় স্থলে প্রতি সেকেণ্ডে একই দূরত্ব অতিক্রম করিয়াছে ;

$\therefore \frac{1}{25}\pi r=\frac{1}{20}\pi(r-8)$, বা $\frac{1}{5}r=\frac{1}{4}(r-8)$, বা $5r-40=4r$; $\therefore r=40$

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $=r$ মিটার $=40$ মিটার।

প্রশ্নমালা ১

($\pi = \frac{22}{7}$ ধরিবে)

1. একটি বৃত্তাকার মাঠের পরিধি 246 মি. 4 ডেসিমি.। উহার ব্যাসার্ধ কত?

2. একটি চাকার ব্যাস 3 মি. 5 ডেসিমি.; 704 মিটার যাইতে উহা কত বার আবর্তন করিবে ?

3. 33 মিটার যাইতে একটি চক্র 3 বার এবং আর একটি চক্র 5 বার করিল। চক্রদ্বয়ের ব্যাসের অন্তর কত ?

4. একটি বৃত্তাকার বাগানের ব্যাসার্ধ 28 মিটার। বাগানটির সীমাফলের সমান সীমাফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত ?

5. একটি আয়তের দৈর্ঘ্য 110 মিটার এবং দৈর্ঘ্য প্রস্থের $2\frac{1}{5}$ গুণ। আয়তটির সীমাফলের সমান পরিধিবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত ?

6. দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টি 35 মিটার এবং পরিধিদ্বয়ের অন্তর 44 মিটার। ব্যাসার্ধদ্বয় নির্ণয় কব।

7. দুইটি বৃত্তের ব্যাসদ্বয়ের অন্তর 14 মিটাব এবং পবিধিদ্বয়ের সমষ্টি 308 মিটার। ব্যাসদ্বয় নির্ণয় কর।

8. একটি বৃত্তের ব্যাস ও পবিধির সমষ্টি 87 মিটাব। উহার ব্যাস ও পরিধি কত ?

9 একটি বৃত্তেব ব্যাসার্ধ ও পরিধিব অন্তর 74 মিটার। উহার ব্যাস ও পরিধি কত ?

10 একটি বৃত্তাকার মাঠেব চারিদিকে একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির বাহিরেব প্রান্তেব পরিধি 528 মিটার এবং ভিতবেব প্রান্তের পবিধি 440 মিটার। রাস্তাটির পবিসর কত ?

11. এক ব্যক্তি প্রতি সেকেণ্ডে 1 মি 5 ডেসিমি হিসাবে একটি বৃত্তাকার মাঠের চারিদিক 44 মিনিটে ঘুবিয়া আসিল। মাঠটিব ব্যাসার্ধ কত ?

12 একটি বৃত্তাকাব মাঠকে উহার ব্যাস বরাববে অতিক্রম করিতে এক ব্যক্তির যত সময লাগে, অর্ধ-পবিধি বরাববে অতিক্রম করিতে তাহা অপেক্ষা 64 সেকেণ্ড অধিক লাগে। ঐ ব্যক্তিব গতিবেগ প্রতি মিনিটে 75 মিটার হইলে মাঠটির ব্যাস কত ?

13. একটি বৃত্তাকাব পথকে বাহিরের প্রান্ত দিয়া অতিক্রম করিতে 48 সেকেণ্ড এবং ভিতরের প্রান্ত দিযা অতিক্রম করিতে 36 সেকেণ্ড লাগে। পথটির পরিসর 14 মিটার হইলে ভিতবেব প্রান্ত দ্বারা গঠিত বৃত্তের ব্যাস কত ?

14. একটি গোলাকার পথকে ভিতরের প্রান্ত দিয়া অতিক্রম করিতে 49 সেকেণ্ড এবং বাহিরের প্রান্ত দিয়া অতিক্রম করিতে 56 সেকেণ্ড লাগে। পথটির পরিসর 8 মিটার হইলে বাহিরের প্রান্তদ্বারা গঠিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত ?

5. বৃত্তের।

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi$ (ব্যাসার্ধ)^2

(ব্যাসার্ধ)^2 = ক্ষেত্রফল $\div \pi$

ব্যাসার্ধ = (ক্ষেত্রফল $\div \pi$)$^{\frac{1}{2}}$

6. গোলাকার বলয়ের ক্ষেত্রফল। দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের পরিধি যে গোলাকার স্থান সীমাবদ্ধ করে, তাহাকে গোলাকার বলয় (Circular Ring) বলে। এককেন্দ্রীয় বৃত্ত দুইটির বৃহত্তরটির ক্ষেত্রফল হইতে ক্ষুদ্রতরটির ক্ষেত্রফল বিয়োগ করিলে উহাদের পরিধিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ গোলাকার বলয়ের ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়। সুতরাং দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃহত্তরটির ব্যাসার্ধ r_1 এবং ক্ষুদ্রতরটির ব্যাসার্ধ r_2 হইলে,

বৃত্তাকার বলয়ের ক্ষেত্রফল $= \pi(r_1^2 - r_2^2)$

বা, $= \pi(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$.

উদাহরণ 1. একটি বৃত্তের পরিধি 132 মিটার; বৃত্তটির ক্ষেত্রফল কত? $(\pi = \frac{22}{7})$.

বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = পরিধি $\div 2\pi = 132$ মি. $\div \frac{2 \times 22}{7} = 21$ মি.;

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \pi . 21^2$ ব. মি. $= 1386$ ব. মি.।

উদাহরণ 2 একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল 616 বর্গ মিটার; বৃত্তটির পরিধি কত? $(\pi = \frac{22}{7})$.

বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = (ক্ষেত্রফল $\div \pi$)$^{\frac{1}{2}}$ = (616 ব. মি. $\times \frac{7}{22}$)$^{\frac{1}{2}}$

= (196 ব. মি.)$^{\frac{1}{2}}$ = 14 মি.,

$\therefore$ নির্ণেয় পরিধি $= 2\pi \times$ ব্যাসার্ধ $= 2 \times \frac{22}{7} \times 14$ মি. $= 88$ মি.।

উদাহরণ 3. একটি গরুকে কত দীর্ঘ রজ্জুদ্বারা একটি তৃণক্ষেত্রে বাঁধিলে উহা 38 ব. মি. 50 ব. ডেসিমি. পরিমিত স্থানের তৃণ খাইতে পারিবে? $(\pi = \frac{22}{7})$.

রজ্জুর দৈর্ঘ্য যেন x. তাহা হইলে গরুটি πx^2 পরিমিত স্থানের তৃণ খাইতে পারিবে।

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$\pi x^2 = 38$ ব. মি. 50 ব. ডেসিমি. $= 38\frac{1}{2}$ ব. মি.

$\therefore$ $x^2 = 38\frac{1}{2}$ ব. মি. $\div \pi = \frac{77}{2} \times \frac{7}{22} = \frac{49}{4}$ ব. মি.

$\therefore$ $x = \frac{7}{2}$ মি. $= 3$ মি. 5 ডেসিমি.

$\therefore$ রজ্জুর নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $= 3$ মি. 5 ডেসিমি.।

উদাহরণ 4. 60 মিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার মাঠের ভিতরে চারিদিকে 8 মিটার প্রশস্ত একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ক্ষেত্রফল কত? $(\pi = \frac{22}{7})$.

রাস্তা ছাড়া বৃত্তাকার মাঠটির ব্যাসার্ধ $= (60 - 8)$ বা 52 মিটার

$\therefore$ রাস্তার ক্ষেত্রফল $= \pi(60^2 - 52^2)$ বর্গ মিটার

$= \frac{22}{7}(60 + 52)(60 - 52)$ বর্গ মিটার

$= \frac{22}{7} \times 112 \times 8$ বর্গ মিটার $= 2816$ বর্গ মিটার

প্রশ্নমালা 6

[$\pi = \frac{22}{7}$ ধর।]

1. একটি বৃত্তের ব্যাস 14 মিটার ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

2. একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল 154 ব. মি. ; উহার ব্যাসার্ধ কত ?

3. একটি বৃত্তের পরিধি 13 মি. 2 ডেসিমি. ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

4. একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল 6 ডেকামি.^{2} 16 মি.^{2} ; উহার পরিধি কত ?

5. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 8 মিটার ; উহার ক্ষেত্রফলের 16 গুণ ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাস কত ?

6. দুইটি বৃত্তাকার জমির ব্যাসার্ধ 35 মিটার ও 21 মিটার। উহাদের ক্ষেত্রফলের অন্তরের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাস কত ?

7. চারিটি বৃত্তের ব্যাস 4, 8, 10 ও 12 মিটার। উহাদের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত ?

8. একটি বলয়াকৃতি ক্ষেত্রের বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ 20 মিটার এবং অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ 15 মিটার। ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কত ?

9. 42 মিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার মাঠের ভিতর দিকে 7 মিটার প্রশস্ত একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ক্ষেত্রফল কত ?

10. একটি গোলাকার বলয়ের বাহিরের পরিসীমা 220 মিটার এবং ভিতরের পরিসীমা 176 মিটার। বলয়টির ক্ষেত্রফল কত ?

11. একটি বৃত্তাকার বলয়ের ক্ষেত্রফল 7 ডেকামি.^{2} 92 মি.^{2}। উহার অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ 1 ডেকামি. 8 মি. হইলে বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত ?

12. একটি গোলাকার পার্কের চারিদিকে একটি পথ আছে। পথটির বাহিরের পরিসীমা ভিতরের পরিসীমা অপেক্ষা 4 মি. 4 ডেসিমি. অধিক হইলে পথটির পরিসর কত ?

13. একটি গরুকে কত দীর্ঘ রজ্জু দ্বারা একটি তৃণক্ষেত্রে বাঁধিলে উহা 55 মি.^{2} 44 ডেসিমি.^{2} পরিমিত স্থানের তৃণ খাইতে পারিবে ?

14. একটি বৃত্তাকার মাঠকে সমতল করিতে প্রতি বর্গ মিটারে 60 পয়সা হিসাবে 2310 টাকা লাগিল। প্রতি মিটারে 1 টাকা 25 পয়সা হিসাবে উহার চারিদিকে বেড়া দিতে কত টাকা লাগিবে ?

ঘনফল

7. কোন ঘনবস্তু যতটা স্থান জুড়িয়া থাকে, তাহার পরিমাণকে ঘনবস্তুটির **ঘনফল** (Volume) বলে।

যে ঘনবস্তুর ছয়টি তল এবং যাহার দুই দুইটি বিপরীত তল সমতল ও সমান্তরাল, তাহাকে **চৌপল** (Parallelopiped) বলে।

যে চৌপলের তলগুলি আয়তক্ষেত্র, তাহাকে **সমকোণী চৌপল** (Rectangular parallelopiped) বা **আয়তিক ঘনবস্তু** (Rectangular solid) বলে।

যে সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ এই তিনটি আয়তনই পরস্পর সমান, তাহাকে **ঘনক** (Cube) বলে।

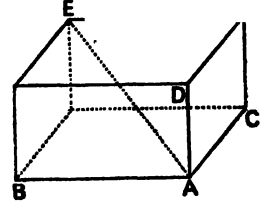
যে ঘনকের প্রত্যেকটি আয়তন 1 মিটার বা 1 কিলোমিটার, তাহার ঘনফলকে যথাক্রমে 1 ঘন মিটার বা 1 ঘন কিলোমিটার বলে।

8. সমকোণী চৌপলের এবং ঘনকের ঘনফল।

(i) **সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × বেধ = ঘনফল ;**

∴ **দৈর্ঘ্য = ঘনফল ÷ (প্রস্থ × বেধ),**

প্রস্থ = ঘনফল ÷ (দৈর্ঘ্য × বেধ),

বেধ = ঘনফল ÷ (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ) ।

মন্তব্য। পার্শ্বের চিত্রে ABCD একটি সমকোণী চৌপল। উহার AB দৈর্ঘ্য, AC প্রস্থ ও AD বেধ। ABC তলকে উহার ভূমি ধরিলে, দৈর্ঘ্য বরাবরে ABD তল উহার এক পার্শ্ব এবং প্রস্থ বরাবরে ACD তল উহার এক প্রান্ত। AE উহার একটি কর্ণ।

একটি সমকোণী চৌপলের ঘনফলকে উহার ভূমি, এক পার্শ্ব এবং এক প্রান্তের ক্ষেত্রফল দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে। যেমন,

সমকোণী চৌপলের ঘনফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × বেধ

$= \sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ}) \times (\text{দৈর্ঘ্য} \times \text{বেধ}) \times (\text{প্রস্থ} \times \text{বেধ})}$

$= \sqrt{\text{ভূমির ক্ষেত্রফল} \times \text{এক পার্শ্বের ক্ষেত্রফল} \times \text{এক প্রান্তের ক্ষেত্রফল}}$ ।

(ii) ঘনকের দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = বেধ ;

∴ **ঘনকের ঘনফল** = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × বেধ $= (\text{দৈর্ঘ্য})^3 = (\text{প্রস্থ})^3 = (\text{বেধ})^3$

∴ $\sqrt[3]{\text{ঘনফল}} = \text{দৈর্ঘ্য} = \text{প্রস্থ} = \text{বেধ}$ ।

9. সমকোণী চৌপল ও ঘনকের কর্ণ।

কোন সমকোণী চৌপলের যে কোন তলের এক কোণ হইতে উহার বিপরীত তলে অবস্থিত দূরবর্তী কোণ পর্যন্ত বিস্তৃত সরলরেখাকে চৌপলটির **কর্ণ** (Diagonal) বলে। সমকোণী চৌপলের চারিটি কর্ণ এবং উহারা পরস্পর সমান। অনু. 8 এর চিত্রে ABCD সমকোণী চৌপলের AE একটি কর্ণ। a, b ও c একক আয়তনবিশিষ্ট **সমকোণী চৌপলের কর্ণ** $= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ একক।

ঘনকের আয়তনগুলি পরস্পর সমান ; সুতরাং কোন ঘনকের প্রত্যেকটি আয়তন a একক হইলে,

ঘনকের কর্ণ $= \sqrt{a^2+a^2+a^2}$ একক $= \sqrt{3a^2}$ একক $= a\sqrt{3}$ একক।

উদাহরণ 1. একটি ঘনকের ঘনফল 13 ঘ. ডেকামি. 824 ঘ. মি.। উহার প্রত্যেক ধারের পরিমাণ কত ?

ঘনফল $=13$ ঘ. ডেকামি. 824 ঘ. মি. $=13824$ ঘ. মি. ;

$\therefore$ প্রত্যেক ধার $=\sqrt[3]{13824}$ মি. $=\sqrt[3]{3^3\times 8^3}$ মি.

$=24$ মি. $=2$ ডেকামি. 4 মি.।

উদাহরণ 2. তিনটি লৌহনির্মিত ঘনকের ধারগুলি যথাক্রমে 3, 4 ও 5 সেন্টিমিটার। উহাদিগকে গলাইয়া একটি ঘনকে পরিণত করিলে উহার কর্ণের পরিমাণ কত হইবে ?

শেষোক্ত ঘনকের ঘনফল $=(3^3+4^3+5^3)$ ঘ. সে.মি. $=216$ ঘ. সে.মি.।

$\therefore$ উহার ধার $=\sqrt[3]{216}$ সে.মি. $=6$ সে.মি.

$\therefore$ উহার কর্ণ $=6\sqrt{3}$ সে.মি.।

উদাহরণ 3. 2 সে.মি. পুরু তক্তা দ্বারা একটি বাক্স প্রস্তুত করিতে হইবে। বাক্সটির বহির্ভাগের দৈর্ঘ্য 40 সে.মি., প্রস্থ 30 সে.মি. এবং উচ্চতা 24 সে.মি. হইলে কত ঘন সেন্টিমিটার এবং কত বর্গ সেন্টিমিটার তক্তা লাগিবে ? যদি প্রতি ঘন সেন্টিমিটার জলের ওজন 1 গ্রাম হয় এবং তক্তার আপেক্ষিক গুরুত্ব $\frac{4}{5}$ হয়, তবে ঐ বাক্সটির ওজন কত হইবে ?

অন্তর্ভাগসহ বাক্সের ঘনফল $=(40\times 30\times 24)$ ঘ. সে.মি. $=28800$ ঘ. সে.মি.

বাক্সের অন্তর্ভাগের ক্ষেত্রফল $=(36\times 26\times 20)$ ঘ. সে.মি. $=18720$ ঘ. সে.মি.

$\therefore$ নির্ণেয় তক্তার ঘনফল $=(28800-18720)$ ঘ. সে.মি. $=$ **10080** ঘ. সে.মি.

$\therefore$ নির্ণেয় তক্তার ক্ষেত্রফল $=(10080\div 2)$ ব. সে.মি. $=$ **5040** ব. সে.মি.

আবার, 10080 ঘ. সে.মি. জলের ওজন $=10080$ গ্রাম ;

$\therefore$ বাক্সের নির্ণেয় ওজন $=(10080\times\frac{4}{5})$ গ্রাম $=8064$ গ্রাম

$=$ **8** কিলোগ্রাম **64** গ্রাম।

প্রশ্নমালা 7

1. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য 4 মিটার, প্রস্থ 3 মিটার এবং উচ্চতা $2\frac{1}{2}$ মিটার ; উহার ঘনফল কত ?

2. একটি আয়তিক ঘনের দৈর্ঘ্য 5 ডেকামি., প্রস্থ 6 মি. এবং উচ্চতা 25 সে.মি. ; উহার ঘনফল কত ?

3. একটি ঘনকের প্রত্যেক ধার 1 মি. 5 ডেসিমি. ; উহার ঘনফল কত ?

4. একটি আয়তিক ঘনের ভূমির ক্ষেত্রফল 3 ব. মি. 24 ব. ডেসিমি. এবং উচ্চতা 2 মি. 5 ডেসিমি. ; উহার ঘনফল কত ?

5. একটি সমকোণী চৌপলের ঘনফল 75 ঘ. মি. এবং ভূমির ক্ষেত্রফল 7 ব. মি. 50 ব. ডেসিমি. ; উহার উচ্চতা কত ?

6. একটি সমকোণী চৌপলের ঘনফল 306 ঘ. মি., দৈর্ঘ্য 8 মি. 5 ডেসিমি. এবং উচ্চতা 7 মি. 2 ডেসিমি. ; উহার প্রস্থ কত ?

7. 10 মি. দীর্ঘ, 4 মি. উচ্চ এবং 5 ডেসিমি. পুরু একটি প্রাচীর নির্মাণ করিতে 25 সে.মি. দীর্ঘ, 125 মিলিমি. প্রশস্ত এবং 80 মিলিমি. পুরু কতগুলি ইট লাগিবে ?

8. 40 মি. দীর্ঘ এবং 30 মি. প্রশস্ত একটি আয়তাকার উদ্যানের বাহিরে চারিদিকে 3 মি. উচ্চ এবং 5 ডেসিমি. পুরু একটি প্রাচীর প্রস্তুত করিতে 25 সে.মি. দীর্ঘ, 12 সে.মি. প্রশস্ত এবং 8 সে.মি. পুরু কয়খানি ইট লাগিবে ?

9. একটি সমকোণী চৌপলের ভূমির ক্ষেত্রফল 96 বর্গ মিটার, এক পার্শ্বের ক্ষেত্রফল 120 বর্গ মিটার এবং এক প্রান্তের ক্ষেত্রফল 80 বর্গ মিটার ; উহার ঘনফল কত ?

10. 1 ঘন সেন্টিমিটার জলের ওজন 1 গ্রাম হইলে 5 মিটার দীর্ঘ, 4 মিটার প্রশস্ত এবং 2 মিটার 5 ডেসিমিটার গভীর চৌবাচ্চায় কত কুইণ্টেল জল ধরিবে ?

11. দেখাও যে, একটি সমকোণী চৌপলের প্রত্যেকটি আয়তনকে দ্বিগুণ করিলে উহার ঘনফল 8 গুণ হইবে।

12. একটি ঘরে 45 ঘন মিটার বায়ু ধরে। যদি ঘরটির প্রস্থ 3 মিটার 6 ডেসিমিটার এবং উচ্চতা 2 মিটার 5 ডেসিমিটার হয়, তবে ঘরটির দৈর্ঘ্য কত ?

13. একটি ঘনকের একটি তলের ক্ষেত্রফল 64 বর্গ মিটার ; প্রতি ঘন মিটারের ওজন $2\frac{1}{2}$ কুইণ্টেল হইলে ঘনকটির ওজন কত ?

14. তিনটি সোনার ঘনকের ধারগুলি যথাক্রমে 3, 4 ও 5 ডেসিমিটার। যদি উহাদিগকে গলাইয়া একটি ঘনকে পরিণত করা হয়, তবে দেখাও যে, এই ঘনকটির ধার 6 ডেসিমিটার হইবে।

15. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য 6 মিটার, প্রস্থ 3 মিটার এবং উচ্চতা 2 মিটার। কত অধিক দৈর্ঘ্যের একটি লৌহদণ্ড ঐ ঘরে রাখা যাইতে পারে ?

16. তিনটি তাম্রনির্মিত ঘনকের ধারগুলি যথাক্রমে 6, 8 ও 10 সেন্টিমিটার। উহাদিগকে গলাইয়া একটি ঘনকে পরিণত করিলে উহার কর্ণ কত হইবে ?

17. 1 ঘন ডেসিমিটার স্বর্ণ পিটিয়া 1 মিটার বর্গ পাত করা হইল। এইরূপ কতগুলি পাত একত্র করিলে 1 সেন্টিমিটার পুরু হইবে ?

18. যদি এক ঘন মিটার লৌহের ওজন 80 কুইণ্টেল হয়, তবে 100 কুইণ্টেল লৌহ দ্বারা 1 মিটার দীর্ঘ, 1 ডেসিমিটার চওড়া এবং 1 ডেসিমিটার পুরু কয়টি লৌহদণ্ড প্রস্তুত করা যাইবে ?

19. 5 মিটার দীর্ঘ এবং 4 মিটার প্রশস্ত একটি চৌবাচ্চা হইতে 750 বালতি জল তুলিয়া লওয়ায় জলের গভীরতা 3 ডেসিমিটার কমিয়া গেল। বালতিটিতে কত ঘন ডেসিমিটার জল ধরে ?

20. 3 মিটার উচ্চ একটি ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থের $2\frac{1}{2}$ গুণ এবং ঘরটিতে 270 ঘন মিটার বায়ু ধরে। ঘরটির সীমাফল কত ?

21. একটি চৌবাচ্চায় $2\frac{1}{2}$ ঘন মিটার জল ধরে। 2 মিটার 5 ডেসিমিটার গভীর একটি বর্গাকার তলবিশিষ্ট চৌবাচ্চায় উহার 4 গুণ জল ধরিলে, শেষোক্ত চৌবাচ্চাটির দৈর্ঘ্য কত ?

22. $1\frac{1}{2}$ ডেসিমি. বর্গ একটি ছিদ্রপথ দিয়া 4 মি. দীর্ঘ এবং 3 মি. প্রশস্ত একটি চৌবাচ্চায় জল প্রবেশ করিতে লাগিল। যদি এক ঘণ্টায় জলের গভীরতা 9 ডেসিমি. বাড়ে, তবে জলের বেগ প্রতি মিনিটে কত মিটার ?

23. 2 সে.মি. পুরু তক্তা দ্বারা একটি বাক্স প্রস্তুত করিতে হইবে। যদি বাক্সটির অন্তর্ভাগের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 40, 30 ও 20 সে.মি. হয়, তবে ঐ বাক্স প্রস্তুত করিতে কত ঘন সেণ্টিমিটার তক্তা লাগিবে ?

24. একটি বাক্সের বহির্ভাগের দৈর্ঘ্য 75 সে.মি., বিস্তার 45 সে.মি. এবং উচ্চতা 30 সে.মি.। $2\frac{1}{2}$ সে.মি. পুরু তক্তা দ্বারা ঐ বাক্স প্রস্তুত করিতে কত বর্গ সেণ্টিমিটার তক্তা লাগিবে ?

25. 2 সে.মি. পুরু তক্তা দ্বারা একটি বাক্স প্রস্তুত করা হইল, যাহার বহির্ভাগের দৈর্ঘ্য 60 সে.মি., প্রস্থ 50 সে.মি. এবং উচ্চতা 45 সে.মি.। যদি 1 ঘ. সে.মি. জলের ওজন 1 গ্রাম হয় এবং তক্তার আপেক্ষিক গুরুত্ব $\frac{5}{8}$ হয়, তবে বাক্সটির ওজন কত ?

26. একটি চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য, প্রস্থের দ্বিগুণ এবং গভীরতা, দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অন্তরের অর্ধেক। চৌবাচ্চাটিতে যদি 512 ঘ. মি. জল ধরে, তবে উহার আয়তনগুলি কত ?

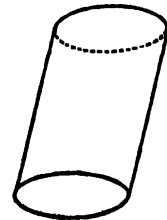
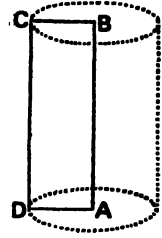
27. 50 জন ছাত্রের জন্য 8 মিটার দীর্ঘ একটি বিদ্যালয়কক্ষ নির্মাণ করিতে হইবে। প্রত্যেক ছাত্রের জন্য $\frac{4}{5}$ বর্গ মিটার মেঝে এবং $2\frac{4}{5}$ ঘন মিটার ফাঁকা স্থান রাখিতে হইলে ঐ কক্ষের প্রস্থ এবং উচ্চতা কত হইবে ?

28. $3\frac{1}{2}$ মিটার গভীর একটি চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য, বিস্তারের $2\frac{1}{2}$ গুণ এবং উহাতে 140 মেট্রিক টন জল ধরে। 1 ঘন সেণ্টিমিটার জলের ওজন 1 গ্রাম হইলে, চৌবাচ্চাটির দৈর্ঘ্য ও বিস্তার কত ?

স্তম্ভক

10. যে ঘনবস্তু দুইটি সমান ও সমান্তরাল প্রান্তীয় তল এবং একটি গোলাকার বক্রতল দ্বারা সীমাবদ্ধ, তাহাকে **স্তম্ভক** বা **চোঙ্গা** (Cylinder) বলে। পার্শ্বস্থ চিত্রের স্তম্ভকটির প্রান্তীয় তলদ্বয় বৃত্ত নয় এবং বক্রতলটি প্রান্তীয় তলদ্বয়ের উপর খাড়াভাবে অবস্থিত নয়।

যে স্তম্ভকের প্রান্তীয় তল দুইটি সমান ও সমান্তরাল বৃত্ত, তাহাকে **বৃত্তীয় স্তম্ভক** বা **বৃত্তীয় চোঙ্গা** (Circular cylinder) বলে। যে কোন বৃত্তীয় স্তম্ভকের বক্রতলটি উহার দুই প্রান্তীয় তলের সহিত সর্বত্র সমকোণে থাকে। এইজন্য বৃত্তীয় স্তম্ভককে **সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভক** (Right circular cylinder) বলা যাইতে পারে।

একটি স্তম্ভক উহার যে প্রান্তীয় তলের উপর অবস্থিত থাকে, তাহাকে স্তম্ভকটির **ভূমি** (Base) বলে এবং বিপরীত প্রান্তীয় তল হইতে ভূমির উপর পতিত লম্বকে উহার **উচ্চতা** (Height) বলে।

একটি আয়তের এক বাহুকে স্থির রাখিয়া আয়তটিকে বাহুটির চারিদিক ঘুরাইয়া আনিলে একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভক উৎপন্ন হয়। চিত্রে ABCD আয়তের AB বাহুকে স্থির রাখিয়া আয়তটিকে ABর চারিদিকে ঘুরাইয়া আনায় একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভক উৎপন্ন হইয়াছে। উহার AB অক্ষ, ABর দৈর্ঘ্য উহার দৈর্ঘ্য বা উচ্চতা, CD উৎপাদক রেখা (Generating line) এবং A ও B কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয়ের যে কোনটি ভূমি।

11. স্তম্ভকের ও বৃত্তীয় স্তম্ভকের ঘনফল। স্তম্ভকের ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা। সুতরাং ভূমির ক্ষেত্রফল = A এবং উচ্চতা = h হইলে, স্তম্ভকের ঘনফল = $A \times h$.

বৃত্তীয় স্তম্ভকের ভূমি একটি বৃত্ত; সুতরাং বৃত্তটির ব্যাসার্ধ যদি r হয় এবং স্তম্ভকটির উচ্চতা যদি h হয়, তবে উল্লিখিত সূত্রটি দাঁড়ায়;

বৃত্তীয় স্তম্ভকের ঘনফল = $\pi r^2 \times h$.

উদাহরণ 1. প্রতি ঘন মিটারে 12 টাকা হিসাবে $1\frac{3}{4}$ মিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি কূপ 8 মিটার গভীর করিয়া খনন করিতে কত খরচ লাগিবে? $(\pi = \frac{22}{7})$

কূপের ভূমির ক্ষেত্রফল $= \pi(1\frac{3}{4})^2$ ব. মি. $= \frac{22 \times 49}{7 \times 16}$ ব. মি. $= \frac{77}{8}$ ব. মি.

$\therefore$ কূপের ঘনফল $= (\frac{77}{8} \times 8)$ ঘ. মি. $= 77$ ঘ. মি.

$\therefore$ নির্ণেয় খরচ = 12 টাকা × 77 = 924 টাকা।

উদাহরণ 2. একটি লৌহনির্মিত নলের দৈর্ঘ্য 7 মিটার, বহিঃতলের ব্যাস 40 সে.মি. এবং অন্তঃতলের ব্যাস 36 সে.মি.। প্রতি ঘ. সে.মি. লৌহের মূল্য $\frac{1}{2}$ পয়সা হইলে ঐ নলটির মূল্য কত হইবে? $(\pi = \frac{22}{7})$

নলটির বহিঃতলের ব্যাসার্ধ = 20 সে.মি., অন্তঃতলের ব্যাসার্ধ = 18 সে.মি. এবং দৈর্ঘ্য = 700 সে.মি.; সুতরাং ভিতরকার ফাঁকা স্থানসহ নলটির ঘনফল = $\pi .20^2.700$ ঘ. সে.মি. এবং ফাঁকা স্থানের ঘনফল $= \pi .18^2.700$ ঘ. সে.মি.।

$\therefore$ নলটির লৌহের ঘনফল $= \pi(20^2 - 18^2) \times 700$ ঘ. সে.মি.

$= (\frac{22}{7} \times 76 \times 700)$ ঘ. সে.মি. $= 167200$ ঘ. সে.মি.

$\therefore$ নলটির মূল্য $= (167200 \times \frac{1}{2})$ পয়সা = 83600 পয়সা = 836 টাকা।

উদাহরণ 3. 1 ঘন ডেসিমিটার স্বর্ণ দ্বারা ·07 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কত মিটার দীর্ঘ তার প্রস্তুত করা যাইতে পারে? $(\pi = \frac{22}{7})$

তারের ঘনফল = 1 ঘ. ডেসি.মি. = 1000 ঘ. সে.মি.

তারের এক প্রান্তের বা ভূমির ক্ষেত্রফল $= \frac{22}{7}(\frac{7}{100})^2$ ব. সে.মি.

$= \frac{77}{5000}$ ব. সে.মি.

$\therefore$ তারের নির্ণেয় দৈর্ঘ্য = তারের ঘনফল ÷ তারের ভূমির ক্ষেত্রফল

$= (1000 \times \frac{5000}{77})$ সে.মি. $= \frac{50000}{77}$ মি. $= 649\frac{27}{77}$ মি.।

প্রশ্নমালা 8

[অপর কিছুর উল্লেখ না থাকিলে, $\pi = \frac{22}{7}$ ধরিবে।]

নিম্নলিখিত সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকগুলির ঘনফল নির্ণয় কর :

1. ভূমির ব্যাসার্ধ 5 মিটার ; উচ্চতা 7 মিটার।
2. ভূমির ব্যাসার্ধ 3 মি. 5 ডেসিমি. ; উচ্চতা 8 মি.।
3. ভূমির ব্যাস 5 মি. 6 ডেসিমি. ; উচ্চতা 10 মি.।
4. ভূমির ব্যাস 8 মি. 4 ডেসিমি. ; উচ্চতা 7 মি. 5 ডেসিমি.।

নিম্নলিখিত বৃত্তীয় স্তম্ভকগুলির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর :

5. ঘনফল 770 ঘন মিটার ; উচ্চতা 5 মিটার।
6. ঘনফল 15 মি.^{3} 400 ডেসিমি.^{3} ; উচ্চতা 2 মি. 5 ডেসিমি.।
7. একটি বৃত্তীয় স্তম্ভকের পরিধি 44 মিটার এবং উচ্চতা 6 মিটার ; উহার ঘনফল কত ?
8. 1 মি. 5 ডেসিমি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি কূপের গভীরতা 14 মিটার হইলে ঐ কূপে কত ঘন মিটার জল ধরিবে ?
9. 8 সেন্টিমিটার ব্যাসবিশিষ্ট একটি নল দ্বারা একটি চৌবাচ্চা যে সময়ে পূর্ণ হয়, 2 সেন্টিমিটার ব্যাসবিশিষ্ট কয়টি নল দ্বারা ঐ চৌবাচ্চা ঐ সময়ে পূর্ণ হইবে ?
10. প্রতি ঘন মিটার 12 টাকা হিসাবে 2 মিটার ব্যাসবিশিষ্ট একটি কূপ 21 মিটার গভীর করিয়া খনন করিতে কত খরচ লাগিবে ?
11. যদি প্রতিটি মুদ্রার ব্যাস $3\frac{1}{2}$ সে.মি. এবং বেধ $\frac{5}{16}$ সে.মি. হয়, তবে কতগুলি মুদ্রা গলাইয়া $12\frac{1}{2}$ সে.মি., 25 সে.মি. ও $27\frac{1}{2}$ সে.মি. আয়তনবিশিষ্ট একটি সমকোণী চৌপল তৈয়ার করা যাইতে পারে ?
12. একটি ফাঁপা লৌহ পাইপের ভিতর দিকের ব্যাস 3 সে.মি. এবং উহার উচ্চতা 2·4 মি.। যদি পাইপের লৌহপাত $\frac{1}{2}$ সে.মি. পুরু হয়, তবে পাইপটির লৌহপাতের ঘনফল কত ? (S. F. 1971)
13. 154 ঘন ডেসিমিটার পিত্তল দ্বারা ·28 সেন্টিমিটার ব্যাসবিশিষ্ট তার প্রস্তুত করা হইল। তারের দৈর্ঘ্য কত কিলোমিটার ?
14. একটি চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও গভীরতার অনুপাত 3 : 2 : 1. যদি ঐ চৌবাচ্চায় 48 মেট্রিক টন জল ধরে এবং 1 ঘন সেন্টিমিটার জলের ওজন 1 গ্রাম হয়, তবে ঐ চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য কত ?
15. একটি বৃত্তীয় মার্বেল স্তম্ভকের ব্যাস 3 মিটার এবং উচ্চতা 20 মিটার। যদি 1 ঘন সেন্টিমিটার জলের ওজন 1 গ্রাম হয় এবং মার্বেলের আপেক্ষিক গুরুত্ব 2·8 হয়, তবে ঐ স্তম্ভকটির ওজন কত মেট্রিক টন ?
16. একটি লৌহনির্মিত ফাঁপা সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের বেধ 2 ডেসিমি., বহিঃতলের ব্যাসার্ধ 1 মি. 5 ডেসিমি. এবং উচ্চতা 2 মি. 5 ডেসিমি.। 1 ঘন

সেন্টিমিটার জলের ওজন 1 গ্রাম এবং লোহের আপেক্ষিক গুরুত্ব 7·5 হইলে স্তম্ভকটির ওজন কত মেট্রিক টন ?

17. একটি পিত্তলনির্মিত নলের দৈর্ঘ্য 4 মিটার, বহিঃতলের ব্যাস 8 ডেসিমিটার এবং অন্তঃতলের ব্যাস 6 ডেসিমিটার। প্রতি ঘন ডেসিমিটার পিত্তলের মূল্য 6 টাকা হইলে ঐ নলটির মূল্য কত হইবে ?

18. বৃত্তীয় স্তম্ভকাকৃতি একটি কাঠের গাদামের ব্যাসার্ধ 5 ডেসিমিটার এবং দৈর্ঘ্য 4 মিটার। যথাসম্ভব কম ছাটিয়া উহাকে বর্গাকার ভূমিবিশিষ্ট একটি সমকোণী চৌপলে পরিণত করিলে চৌপলটির ঘনফল কত হইবে ?

19. 14 মিটার গভীর এমন একটি কূপ খনন করিতে হইবে যেন 5 ডেসিমিটার পুরু করিয়া ইট গাঁথিলে কূপটির ভিতর দিকের ব্যাসার্ধ 2 মিটার থাকে। কত ঘন মিটার মাটি কাটিতে হইবে ? কত ঘন মিটার গাঁথনি করিতে হইবে ?

20. 4 মিটার দীর্ঘ একটি লৌহনির্মিত নলের অন্তর্ভাগের ব্যাস 6 সেন্টিমিটার এবং লোহের বেধ 1 সেন্টিমিটার। এক ঘন সেন্টিমিটার লোহের ওজন $7\frac{1}{2}$ গ্রাম হইলে নলটির ওজন কত ?

গোলক

12. যদি কোন ঘনবস্তু একটিমাত্র তল দ্বারা এরূপে সীমাবদ্ধ হয় যে, উহার অন্তর্গত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ তল পর্যন্ত বিস্তৃত যাবতীয় সরলরেখা পরস্পর সমান হয়, তবে ঐ ঘনবস্তুকে **গোলক** বা **বর্তুল** (Sphere) বলে।

একটি অর্ধ-বৃত্তের ব্যাসকে স্থির রাখিয়া অর্ধ-বৃত্তটিকে ব্যাসটির চারিদিকে ঘুরাইয়া আনিলে গোলক উৎপন্ন হয়।

কোন গোলকের অন্তর্গত যে নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার তল পর্যন্ত বিস্তৃত যাবতীয় সরলরেখা পরস্পর সমান হয়, তাহাকে গোলকটির **কেন্দ্র** (Centre) বলে।

কোন গোলকের কেন্দ্র হইতে উহার তল পর্যন্ত বিস্তৃত সরলরেখাকে গোলকটির **ব্যাসার্ধ** (Radius) বলে।

কোন গোলকের কেন্দ্র দিয়া উভয় দিকে তল পর্যন্ত বিস্তৃত সরলরেখাকে গোলকটির **ব্যাস** (Diameter) বলে।

13. **গোলকের ঘনফল।** গোলকের ব্যাস d এবং ব্যাসার্ধ r হইলে,

$$\text{গোলকের ঘনফল} = \tfrac{1}{6}\pi d^3 \quad \cdots \quad \cdots (1)$$

$$= \tfrac{1}{6}\pi(2r)^3 = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \cdots (2)$$

$$\therefore (1) \text{ হইতে, } d = \left(\frac{6}{\pi} \times \text{গোলকের ঘনফল}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{এবং } (2) \text{ হইতে, } r = \left(\frac{3}{4\pi} \times \text{গোলকের ঘনফল}\right)^{\frac{1}{3}}।$$

উদা. 1. 4 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি লৌহগোলক দ্বারা $\frac{1}{2}$ সে.মি. ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট কতগুলি লৌহগোলক প্রস্তুত করা যাইতে পারে ?

4 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট গোলকের ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi(4)^3$ ঘ. সে.মি.,

$\frac{1}{4}$ সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট গোলকের ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi(\frac{1}{4})^3$ ঘ. সে.মি. ;

$\therefore$ গোলকের নির্ণেয় সংখ্যা $=\frac{4}{3}\pi(4)^3\div\frac{4}{3}\pi(\frac{1}{4})^3=4^3\div(\frac{1}{4})^3$

$=64\times64=4096.$

উদা. 2. 6 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি নিরেট লৌহগোলকের ওজন 870 গ্রাম হইলে, যে ফাঁপা লৌহগোলকের বহিঃতলের ব্যাস 22 সে.মি. এবং অন্তঃতলের ব্যাস 16 সে.মি., তাহার ওজন কত ?

ফাঁপা গোলকটিতে লৌহের পরিমাণ $=\frac{1}{6}\pi(22^3-16^3)$ ঘ. সে.মি.

নিরেট গোলকটিতে লৌহের পরিমাণ $=\frac{1}{6}\pi\times6^3$ ঘ. সে.মি.

$\therefore$ ফাঁপা গোলকটির ওজন $=\dfrac{\frac{1}{6}\pi(22^3-16^3)}{\frac{1}{6}\pi\times6^3}\times870$ গ্রাম

$=\dfrac{2^3(11^3-8^3)}{2^3.3^3}\times870$ গ্রাম $=\dfrac{819\times870}{3^3}$ গ্রাম

$=26390$ গ্রা. $=26$ কিগ্রা. 390 গ্রাম।

প্রশ্নমালা 9

[অপর কিছুর উল্লেখ না থাকিলে, $\pi=\frac{22}{7}$ ধরিবে।]

1. যে গোলকের ব্যাস 21 সে.মি., তাহার ঘনফল কত ?
2. যে গোলকের ব্যাসার্ধ 10 মি. 5 ডেসিমি., তাহার ঘনফল কত ?
3. যে গোলকের ঘনফল $179\frac{2}{3}$ ঘ. সে.মি., তাহার ব্যাস কত ?
4. যে গোলকের ঘনফল $381\frac{6}{7}$ ঘ. মি., তাহার ব্যাসার্ধ কত ?
5. যে গোলকের পরিধি 44 সে.মি., তাহার ঘনফল কত ?
6. যে গোলকের পরিধি $75\frac{3}{7}$ মিটার, তাহার ঘনফল কত ?
7. 2 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি লৌহগোলক দ্বারা $\frac{1}{8}$ সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কতগুলি গোলক প্রস্তুত করা যায় ?
8. 1 সে.মি., 6 সে.মি. ও 8 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট স্বর্ণনির্মিত তিনটি ঘন-গোলককে গলাইয়া একটি ঘনগোলক প্রস্তুত করিলে উহার ব্যাসার্ধ কত হইবে ? (S. F. 1967)
9. সমকোণী চৌপলাকৃতি একখণ্ড সীসার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ যথাক্রমে 15, 11 ও 5 সে.মি.। উহা দ্বারা $\frac{1}{4}$ সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কতগুলি গুলি প্রস্তুত করা যাইতে পারে ?
10. একটি ফাঁপা লৌহগোলকের বহিঃব্যাস 15 সে.মি. এবং লৌহের বেধ $1\frac{1}{2}$ সে.মি.। প্রতি ঘ. সে.মি. লৌহের ওজন 7 গ্রাম হইলে গোলকটির ওজন কত ?
11. একটি ফাঁপা গোলক পূর্ণ করিয়া 294 কিলোগ্রাম বারুদ রাখা হইল। যদি 132 ঘ. সে.মি. বারুদের ওজন 1 কি.গ্রা. হয়, তবে গোলকটির অন্তঃব্যাস কত ?

12. অর্ধ-গোলকাকৃতি একটি পাত্রের অন্তঃব্যাসার্ধ 21 সে.মি. হইলে উহাতে কত জল ধরিবে ? 1 ঘ. সে.মি. জলের ওজন = 1 গ্রাম।

13. একটি গোলকের এবং একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের ব্যাস পরস্পর সমান। যদি স্তম্ভকটির উচ্চতা উহার ব্যাসের সমান হয়, তবে উহাদের ঘনফলদ্বয়ের অনুপাত কত ?

14. একটি বৃত্তীয় স্তম্ভকের ভূমির ভিতরকার ব্যাস 12 সে.মি. এবং উহার মধ্যে কিছুটা জল আছে। 6 সে.মি. ব্যাসের একটি গোলক ঐ স্তম্ভকের জলের ভিতর সম্পূর্ণরূপে ডুবাইয়া দিলে জলের উপরিতল কতটা উপরে উঠিবে ? (S. F. 1970)

15. 1 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি নিরেট লৌহগোলকের ওজন 4 গ্রাম হইলে, যে ফাঁপা লৌহগোলকের বহিঃতলের ব্যাস 15 সে.মি. এবং অন্তঃতলের ব্যাস 13 সে.মি., তাহার ওজন কত হইবে ?

16. একই ধাতব পদার্থ দ্বারা গঠিত একটি নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধ 4 সে.মি. এবং একটি ফাঁপা গোলকের অন্তঃব্যাস 8 সে.মি. এবং বহিঃব্যাস 10 সে.মি.। নিরেট গোলকটির ওজন 8 কি.গ্রা. হইলে ফাঁপা গোলকটির ওজন কত ?

ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল

14. সমকোণী চৌপলের ও ঘনকের তলের ক্ষেত্রফল। কোন ঘনবস্তুর সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল বলিলে, ঘনবস্তুটি যে সকল তল দ্বারা সীমাবদ্ধ থাকে, তাহাদের ক্ষেত্রফল বুঝায়।

সমকোণী চৌপলের ছয়টি তল এবং তলগুলি সবই আয়তক্ষেত্র। পরস্পর বিপরীত দুই দুইটি তল সর্বসম।

ঘনকের ছয়টি তল এবং তলগুলি সমান বর্গক্ষেত্র।

কোন সমকোণী চৌপলের আয়তন a, b ও c হইলে, উহার ছয়টি তলের অর্থাৎ **সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল** $= 2(ab+ac+bc)$ এবং কোন ঘনকের আয়তনগুলি a হইলে, উহার **সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল** $= 6a^2$.

উদা. 1. $12\frac{1}{2}$ সে.মি. দীর্ঘ, 10 সে.মি. চওড়া এবং 1 সে.মি. পুরু এক টুকরা পিত্তলের চাদরকে গলাইয়া একটি ঘনক প্রস্তুত করা হইল। ইহাতে তলের পরিমাণ কত কমিল ?

চাদরের সমুদয় তল $= 2(12\frac{1}{2}\times 10 + 12\frac{1}{2}\times 1 + 10\times 1)$ ব. সে.মি. $= 295$ ব. সে.মি.

ঘনকের ঘনফল = চাদরের ঘনফল $= (12\frac{1}{2}\times 10\times 1)$ ঘ. সে.মি. $= 125$ ঘ. সে.মি.

$\therefore$ ঘনকের ধার $= \sqrt[3]{125}$ ঘ. সে.মি. $= 5$ সে.মি.

$\therefore$ ঘনকের সমুদয় তল $= (5\times 5)$ ব. সে.মি. $\times 6 = 150$ ব. সে.মি.

$\therefore$ তলের পরিমাণ $(295-150)$ ব. সে.মি. বা 145 ব. সে.মি. কমিল।

উদা. 2. $\frac{1}{16}$ সে.মি. পুরু এবং $1\frac{1}{8}$ সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কতগুলি মুদ্রা গলাইয়া 726 ব. সে.মি. তলবিশিষ্ট একটি ঘনক প্রস্তুত করা যাইতে পারে ?

ঘনকটির প্রত্যেক তল $= 726$ ব. সে.মি. $\div 6 = 121$ ব. সে.মি.

$\therefore$ ঘনকটির প্রত্যেক ধার $= \sqrt{121}$ ব. সে.মি. $= 11$ সে. মি.

$\therefore$ ঘনকটির ঘনফল $= 11^3$ ঘ. সে.মি.

প্রত্যেকটি মুদ্রার ঘনফল $= \frac{22}{7} \times (\frac{11}{16})^2 \times \frac{7}{32}$ ঘ. সে.মি.

$\therefore$ নির্ণেয় মুদ্রাসংখ্যা $= 11^3 \times \frac{32}{7} \times \frac{16}{11} \times \frac{16}{11} \times \frac{7}{22} = 4096$.

উদা. 3. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত $6 : 5 : 4$ এবং উহার সমুদয় তলের পরিমাণ 33300 বর্গ সেন্টিমিটার। চৌপলটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা কত? (S. F. 1965)

মনে কর, চৌপলটির দৈর্ঘ্য $= 6x$ সে. মি.। তাহা হইলে, প্রস্থ $= 5x$ সে. মি. এবং উচ্চতা $= 4x$ সে. মি.।

$\therefore$ সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল $= 2(6x.5x + 6x.4x + 5x.4x)$ ব. সে.মি.

$= 2(30x^2 + 24x^2 + 20x^2)$ ব. সে.মি. $= 148x^2$ ব. সে.মি.।

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $148x^2 = 33300$ বা, $x^2 = 225$ $\therefore$ $x = 15$.

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $= 90$ সে.মি., প্রস্থ $= 75$ সে.মি., উচ্চতা $= 60$ সে.মি.।

প্রশ্নমালা 10

1. একটি সমকোণী চৌপলের আয়তনগুলি 2 মি., 3 মি. ও 4 মি.; উহার সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল কত?

2. একটি সমকোণী চৌপলের আয়তনগুলি 1 মি. 2 ডেসিমি., 1 মি. 6 ডেসিমি. এবং 1 মি. 8 ডেসিমি.; উহার সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল কত?

3. একটি ঘনকের এক ধার 2 মি. 5 ডেসিমি.; উহার সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

4. একটি ঘনকের উচ্চতা 1 মি. 2 ডেসিমি. 5 সে. মি.; উহার সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল কত?

5. যে ঘনকের ঘনফল 1 মি.^{3} 728 ডেসিমি.^{3}, তাহার সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল কত?

6. একটি ঘনকের ঘনফল 512 ঘ. মি.; প্রতি বর্গ মিটারে 75 পয়সা হিসাবে উহার সমুদয় তল রং করিতে কত খরচ লাগিবে?

7. প্রতি বর্গ মিটারে 80 পয়সা হিসাবে একটি ঘনকের সমুদয় তল রং করিতে 480 টাকা লাগিল। ঘনকটির ঘনফল কত?

8. 16 সে.মি. দীর্ঘ, 8 সে.মি. চওড়া এবং $\frac{1}{2}$ সে.মি. পুরু এক টুকরা পিত্তলের চাদরকে গলাইয়া একটি ঘনক প্রস্তত করা হইল। ইহাতে সমুদয় তলের পরিমাণ কত কমিল?

9. $\frac{3}{8}$ সে.মি. পুরু এবং $1\frac{7}{8}$ সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কতগুলি মুদ্রা গলাইয়া এমন একটি ঘনক প্রস্তত করা যাইবে, যাহার সমুদয় তলের পরিমাণ 13 ব. ডেসিমি. 50 ব. সে. মি. হইবে?

10. 2 সে.মি. পুরু তক্তা দ্বারা ডালাযুক্ত একটি বাক্স প্রস্তুত করা হইল। বাক্সটির অন্তর্ভাগের দৈর্ঘ্য 86 সে.মি., প্রস্থ 71 সে.মি. এবং উচ্চতা 36 সে.মি. হইলে, উহার বহির্ভাগের সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল কত ?

11. একটি সমকোণী চৌপলের আয়তনগুলি যথাক্রমে 18, 6 ও 2 মিটার। উহার সমান ঘনফলবিশিষ্ট একটি ঘনকের সমুদয় তল রং করিতে প্রতি বর্গ মিটারে 2 টাকা 50 পয়সা হিসাবে কত খরচ লাগিবে ?

12. $2\frac{1}{2}$ মি. উচ্চ একটি বর্গাকার ঘরে 90 ঘ. মি. বায়ু ধরে। প্রতি বর্গ মিটারে 1 টাকা $12\frac{1}{2}$ পয়সা হিসাবে উহার ছাদ ও দেওয়ালে চূণকাম করিতে কত লাগিবে ?

13. একটি সমকোণী চৌপলের আয়তনগুলি 2 মি., 6 মি. ও 12 মি.। যে ঘনকের সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল চৌপলটির সমুদয় তলের ক্ষেত্রফলের সমান, তাহার প্রত্যেক ধারের পরিমাণ কত ?

14. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 5 : 4 : 3 এবং তলগুলির মোট ক্ষেত্রফল 13536 ব. সে.মি. হইলে উহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা কত ? (S. F. 1967)

15. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য 18 মিটার ও প্রস্থ 12 মিটার। যদি উহার সমুদয় তলের পরিমাণ 732 বর্গ মিটার হয়, তবে উহার উচ্চতা কত ? (S. F. 1966)

[উচ্চতা $=x$ মিটার হইলে, 2(18 মি. × 12 মি. + 18 মি. × x মি. + 12 মি. × x মি. = 732 ব. মি.]

16. একটি সমকোণী চৌপলের আয়তনগুলি 9 মি., 12 মি. ও 16 মি.। উহার সমান ঘনফলবিশিষ্ট ঘনকের সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল কত ?

17. একটি সমকোণী চৌপলের আয়তনগুলির অনুপাত 1 : 2 : 3. উহার ঘনফল 1296 ঘ. মি. হইলে, উহার সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল কত ?

15. স্তম্ভকের তলের ক্ষেত্রফল। একটি ফাঁপা সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের প্রান্তীয় তলদ্বয়কে পৃথক করিয়া রাখিয়া বাঁকা তলটিকে খাড়াভাবে কাটিয়া লইয়া সমতলে পরিণত করিলে উহা একটি আয়তক্ষেত্র হইবে, যাহার আয়তনদ্বয় হইবে স্তম্ভকটির পরিধি এবং উচ্চতা।

∴ বাঁকা তলের ক্ষেত্রফল = পরিধি × উচ্চতা ; সুতরাং ব্যাসার্ধ r এবং উচ্চতা h হইলে,

স্তম্ভকের বাঁকা তলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r \times h$ এবং

প্রান্তদ্বয়সহ সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h+r)$.

উদা. 1. একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের পরিধি 44 মি. এবং উচ্চতা 10 মি. ; উহার সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল কত ?

$2\pi \times$ ব্যাসার্ধ = পরিধি, ∴ $2 \times \frac{22}{7} \times$ ব্যাসার্ধ = 44 মি.

∴ ব্যাসার্ধ $= 44 \times \frac{7}{2 \times 22}$ মি. = 7 মি.।

এক্ষণে, বাঁকা তলের ক্ষেত্রফল = পরিধি × উচ্চতা = (44 × 10) ব. মি. = 440 ব. মি.

এবং প্রান্তদ্বয়ের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \pi \times$ (ব্যাসার্ধ)$^2 = (2 \times \frac{22}{7} \times 7^2)$ ব. মি.

= 308 ব. মি. ;

∴ সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল = (440 + 308) ব. মি. = 748 ব. মি. ।

উদা. 2. একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল 9 ব. ডেকামি. 24 ব. মি. এবং উহার উচ্চতা ভূমির ব্যাসার্ধের 2 গুণ। উহার উচ্চতা কত ?

মনে কর, ব্যাসার্ধ $= r$ মিটার। তাহা হইলে, উচ্চতা $= 2r$ মিটার।

∴ সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(2r + r)$ ব. মি. $= 6\pi r^2$ ব. মি. ;

∴ $6\pi r^2$ ব. মি. = 9 ব. ডেকামি. 24 ব. মি. = 924 ব. মি.

∴ $6\pi r^2 = 924$ বা, $6 \times \frac{22}{7} r^2 = 924$

∴ $r^2 = 924 \times \frac{7}{6 \times 22} = 7^2$ ∴ $r = 7$

∴ উচ্চতা $= 2r$ মি. = 14 মি. ।

প্রশ্নমালা 11

নিম্নলিখিত সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকগুলির বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

1. পরিধি 1 মি. 5 ডেসিমি. ; উচ্চতা 4 মি. ।
2. ব্যাস 2 মি. 8 ডেসিমি. ; উচ্চতা 2 মি. 5 ডেসিমি. ।
3. ব্যাসার্ধ 3 মি. 6 ডেসিমি. ; উচ্চতা 4 মি. 2 ডেসিমি. ।

নিম্নলিখিত সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকগুলির সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

4. ব্যাসার্ধ $3\frac{1}{2}$ মি. ; উচ্চতা 4 মি. ।
5. ব্যাস 3 মি. 5 ডেসিমি. ; উচ্চতা 4 মি. 8 ডেসিমি. ।
6. পরিধি 13 মি. 2 ডেসিমি. ; উচ্চতা 6 মি. 3 ডেসিমি. ।
7. একটি বৃত্তীয় স্তম্ভকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 2 ব. মি. 64 ব. ডেসিমি. ; উচ্চতা 6 ডেসিমি. হইলে ভূমির ব্যাসার্ধ কত ?
8. একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 26 ব. মি. 40 ব. ডেসিমি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 1 মি. 2 ডেসিমি. ; উহার উচ্চতা কত ?
9. একটি বৃত্তীয় স্তম্ভকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 7 ব. মি. 92 ব. ডেসিমি. এবং ভূমির ব্যাস 2 মি. 8 ডেসিমি. ; উহার উচ্চতা কত ?
10. একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 4 ব. মি. 40 ব. ডেসিমি. এবং উচ্চতা 10 ডেসিমি. ; উহার ভূমির ক্ষেত্রফল কত ?
11. একটি বৃত্তীয় স্তম্ভকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 10 ব. মি. 56 ব. ডেসিমি. এবং উচ্চতা 1 মি. 2 ডেসিমি. ; উহার সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল কত ?
12. একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল 7 ব. মি. 48 ব. ডেসিমি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 7 ডেসিমি. ; উহার উচ্চতা কত ?
13. একটি বৃত্তীয় স্তম্ভকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 1000 ব. সে.মি. এবং ভূমির ব্যাস 20 সে.মি. । উহার ঘনফল কত ? (S. F. 1966)

14. একটি বৃত্তীয় স্তম্ভকের সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল 12 মি.^{2} 32 ডেসিমি.^{2} এবং উহার উচ্চতা ভূমির ব্যাসার্ধের 3 গুণ ; উহার ভূমির ব্যাস ও উচ্চতা কত ?

15. একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের ঘনফল 1584 ঘন মিটার এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 6 মিটার ; প্রতি বর্গ মিটারে 2 টাকা 50 পয়সা হিসাবে উহার বক্রতল রং করিতে কত খরচ লাগিবে ?

16. একটি বৃত্তীয় স্তম্ভকের ভূমির ক্ষেত্রফল উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সমান ; স্তম্ভকটির উচ্চতা এবং ব্যাসার্ধের অনুপাত কত ?

17. একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল উহার প্রান্তদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ ; স্তম্ভকটির উচ্চতা এবং ব্যাসের অনুপাত কত ?

18. যে বৃত্তীয় স্তম্ভকের ঘনফল এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফল একই সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তাহার ব্যাস কত ?

16. **গোলকের তলের ক্ষেত্রফল।** কোন গোলকের ব্যাস d এবং ব্যাসার্ধ r হইলে, উহার তলের ক্ষেত্রফল $=\pi$(ব্যাস)$^2=\pi d^2$ বা, $=\pi(2r)^2=4\pi r^2$.

উদা. 1. প্রতি বর্গ মিটারে 70 পয়সা হিসাবে 5 মিটার ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলকের তল রং করিতে কত লাগিবে ? $(\pi=\frac{22}{7})$

তলের ক্ষেত্রফল $=\pi.5^2$ বর্গ মিটার

∴ নির্ণেয় খরচ $=\frac{22}{7}\times25\times70$ পয়সা $=5500$ পয়সা $=55$ টাকা।

উদা. 2. 3 মিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভক এবং দুইটি প্রান্তীয় অর্ধ-গোলক দ্বারা গঠিত একটি ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য 21 মিটার। প্রতি বর্গ মিটারে 1 টাকা 50 পয়সা হিসাবে ঘনবস্তুটিকে রং করিতে কত খরচ লাগিবে ?

স্তম্ভকাকৃতি অংশের দৈর্ঘ্য $=(21-3\times2)$ মিটার $=15$ মিটার ;

∴ স্তম্ভকাকৃতি অংশের বক্রতল $=2\pi.3\times15$ বর্গ মিটার $=90\pi$ বর্গ মিটার

এবং অর্ধ-গোলকাকৃতি অংশদ্বয়ের বক্রতল $=4\pi.3^2$ বর্গ মিটার $=36\pi$ বর্গ মিটার

∴ ঘনবস্তুটির সমুদয় তল $=(90+36)\pi$ বর্গ মিটার $=126\pi$ বর্গ মিটার

∴ নির্ণেয় খরচ $=126\times\frac{22}{7}\times1\frac{1}{2}$ টাকা $=594$ টাকা।

উদা. 3. একটি অর্ধ-গোলকাকৃতি পাত্রের বেধ 1 সেন্টিমিটার এবং বহিঃব্যাস 10 সেন্টিমিটার ; প্রতি বর্গ সেন্টিমিটারে 25 পয়সা হিসাবে উহার সমুদয় তল বার্ণিশ করিতে কত খরচ লাগিবে ?

বহিঃতলের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}.\pi.10^2$ ব. সে.মি. $=50\pi$ ব. সে.মি.

অন্তঃতলের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}.\pi.(10-1\times2)^2$ ব. সে.মি. $=32\pi$ ব. সে.মি.

উভয় তল দ্বারা সীমাবদ্ধ গোলাকার বলয়াকৃতি প্রান্তের ক্ষেত্রফল

$=\pi(5^2-4^2)$ ব. সে.মি. $=9\pi$ ব. সে.মি.

∴ সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল $=\pi(50+32+9)$ ব. সে.মি. $=91\pi$ ব. সে.মি.

∴ নির্ণেয় খরচ $=91\times\frac{22}{7}\times25$ পয়সা $=7150$ পয়সা $=71$ টাকা 50 পয়সা।

প্রশ্নমালা 12

($\pi = \frac{22}{7}$ ধর।)

নিম্নলিখিত গোলকগুলির তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

1. ব্যাসার্ধ 14 মিটার
2. ব্যাসার্ধ 3 ডেকামি. 5 মি.
3. ব্যাস 4 মি. 2 ডেসিমি.
4. পরিধি 8 মি. 8 ডেসিমি.
5. ঘনফল $1437\frac{1}{3}$ ঘন সেন্টিমিটার

6. যে গোলকের তল 6 ব. মি. 16 ব. ডেসিমি., তাহার ব্যাসার্ধ কত ?

7. একটি ফাঁপা গোলকের বেধ 1 সেন্টিমিটার এবং অন্তঃতলের ব্যাসার্ধ 6 সেন্টিমিটার ; বহিঃতলের ক্ষেত্রফল কত ?

8. একটি ফাঁপা গোলকের বেধ $1\frac{1}{2}$ সেন্টিমিটার এবং বহিঃতলের ব্যাস 10 সেন্টিমিটার ; অন্তঃতলের ক্ষেত্রফল কত ?

9. একটি অর্ধ-গোলকাকৃতি গম্বুজের ব্যাস 4 মি. 2 ডেসিমি. ; উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?

10. 3 মিটার ব্যাসবিশিষ্ট একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভক এবং দুইটি প্রান্তীয় অর্ধ-গোলক দ্বারা গঠিত একটি ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য 13 মিটার। ঘন বস্তুটির সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল কত ?

11. একটি বৃত্তাকার ঘরের বহিঃব্যাস 14 মিটার ; মেঝের উপর ঠিক খাড়াভাবে অবস্থিত দেওয়ালের উচ্চতা 5 মিটার এবং অর্ধ-গোলকাকৃতি একটি গম্বুজ উহার ছাদ। প্রতি বর্গ মিটারে 3 টাকা 25 পয়সা হিসাবে উহার বহিঃতল আস্তর করিতে কত লাগিবে ?

12. একটি অর্ধ-গোলকাকৃতি পাত্রের বেধ 2 সে.মি. এবং অন্তঃব্যাস 16 সে.মি. ; প্রতি ব. সে.মি. $12\frac{1}{2}$ পয়সা হিসাবে উহার সমুদয় তল বার্ণিশ করিতে কত লাগিবে ?

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1

1. 120 মিটার 2. 40 ব. মি. 3. 160 ব. মি. 4. 390 ব. মি.
5. 994 ব. মি. 6. 840 খানি 7. 10 মিটার 8. 16 মিটার
9. 16 মি., 12 মি. 10. 5 মিটার 11. 24 ব. কি. মি. 12. 1078 টাকা

প্রশ্নমালা 2

1. 4 হে. মি. 4 ডেসিমি. 2. 1 হে. মি. 4 ডেকামি. 7 মি.
3. 3 ডেকামি.^{2} 25 মি.^{2} 4. 4 ডেকামি.^{2} 16 মি.^{2} 5. 240 মিটার
6. 2500 খানি 7. 45 মিটার 8. 2100 টাকা
9. 16 মি., 20 মি. 10. 20 ডেকামি.^{2} 25 মি.^{2}

প্রশ্নমালা 3

1. $3\frac{3}{4}$ মিটার 2. 4 মিটার 3. 5 মিটার 4. 128 ব. মিটার
5. 8 মি., 5 মি. 6. 21 মি., 6 মি. 7. 20 মি., 8 মি., 5 মি.
8. 63 টাকা

প্রশ্নমালা 4

1. 20 ব. মি. 91 ব. ডেসিমি. 2. 12 ব. ডেকামি.
3. 4 ডেকামি.^{2} 80 মি.^{2} 4. 72 বর্গ মিটার 5. 16 $\sqrt{3}$ বর্গ মিটার
6. 4 ডেকামি.^{2} 80 মি.^{2} 7. 1 হে. মি. 5 ডেকামি.
8. 144 $\sqrt{3}$ ডেসিমি.^{2} 9. 192 বর্গ মিটার 10. 12 মি., 16 মি.
11. 5 মি., 12 মি. 12. 16 মি., 20 মি.
13. 12 $\sqrt{3}$ মি., 108 $\sqrt{3}$ ব. মি. 14. 8 মিটার 15. 24 মিটার
16. 12 মিটার 17. 40 মিটার 18. 160 সে. মি.

প্রশ্নমালা 5

1. 39 মি. 2 ডেসিমি. 2. 64 বার 3. 1 মি. 4 ডেসিমি.
4. 1936 ব. মি. 5. 49 মিটার 6. 14 মি., 21 মি.
7. 42 মি., 56 মি. 8. 21 মি., 66 মি. 9. 28 মি., 88 মি.
10. 14 মিটার 11. 630 মিটার 12. 140 মিটার
13. 84 মিটার 14. 64 মিটার

প্রশ্নমালা 6

1. 154 ব. মি. 2. 7 মিটার 3. 13 মি.^{2} 86 ডেসিমি.^{2}
4. 8 ডেকামি. 8 মি. 5. 64 মিটার 6. 56 মিটার
7. 9 মিটার 8. 550 ব. মি. 9. 1694 ব. মি.
10. 1386 ব. মি. 11. 2 ডেকামি. 4 মি. 12. 7 ডেসিমি.
13. 4 মি. 2 ডেসিমি. 14. 275 টাকা

প্রশ্নমালা 7

1. 30 মি.^{3} 2. 75 মি.^{3} 3. 3 মি.^{3} 375 ডেসিমি.^{3}
4. 8 মি.^{3} 100 ডেসিমি.^{3} 5. 1 ডেকামি. 6. 5 মি.
7. 8000 খানি 8. 88750 খানি 9. 960 মি.^{3}
10. 500 কুইন্টেল 12. 5 মিটার 13. 1280 কুইন্টেল
15. 7 মি. 16. $12\sqrt{3}$ সে.মি. 17. 10 খানি 18. 125টি
19. 8 ডেসিমি.^{3} 20. 42 মি. 21. 2 মি. 22. 8 মি.
23. 11904 সে.মি.^{3} 24. 12500 সে.মি.^{2} 25. 18 কি.গ্রা. 365 গ্রা.
26. 16 মি., 8 মি., 4 মি. 27. 5 মি., $3\frac{1}{3}$ মি. 28. 10 মি., 4 মি.

প্রশ্নমালা 8

1. 550 মি.^{3} 2. 308 মি.^{3} 3. 246 মি.^{3} 400 ডেসিমি.^{3}
4. 415 মি.^{3} 800 ডেসিমি.^{3} 5. 7 মিটার 6. 1 মি. 4 ডেসিমি.
7. 924 মি.^{3} 8. 99 মি.^{3} 9. 16টি 10. 792 টাকা 11. 3584টি
12. 1320 সে.মি.^{3} 13. 25 কি.মি. 14. 6 মি. 15. 396 মেট্রিক টন
16. 33 মেট্রিক টন 17. 5280 টাকা 18. 2 মি.^{3}
19. 275 মি.^{3}, 99 মি.^{3} 20. 66 কি.গ্রা.

প্রশ্নমালা 9

1. 4851 সে.মি.^{3} 2. 4 ডেকামি.^{3} 851 মি.^{3} 3. 7 সে.মি.
4. $4\frac{1}{2}$ মি. 5. $1437\frac{1}{3}$ সে.মি.^{3} 6. $7241\frac{1}{7}$ মি.^{3}
7. 4096টি 8. 9 সে.মি. 9. 12600টি 10. 6 কি.গ্রা. 39 গ্রা.
11. 42 সে.মি. 12. 19 কি.গ্রা. 404 গ্রা. 13. 2 : 3
14. 1 সে.মি. 15. 4 কি.গ্রা. 712 গ্রা. 16. 7 কি.গ্রা. 625 গ্রা.

প্রশ্নমালা 10

1. 52 মি.^{2} 2. 13 মি.^{2} 92 ডেসিমি.^{2} 3. 37 মি.^{2} 50 ডেসিমি.^{2}
4. 9 মি.^{2} 37 ডেসিমি.^{2} 50সে.মি.^{2} 5. 8 মি.^{2} 64 ডেসিমি.^{2} 6. 288 টাকা

7. 1000 মি.^{3} 8. 184 সে.মি.^{2} 9. $814\frac{6}{11}$টি 10. 26700 সে.মি.^{2}

11. 540 টাকা 12. 108 টাকা 13. 6 মি.

14. দৈর্ঘ্য 60 সে.মি., প্রস্থ 48 সে.মি., উচ্চতা 36 সে.মি. 15. 5 মি.

16. 864 মি.^{2} 17. 792 মি.^{2}

প্রশ্নমালা 11

1. 6 মি.^{2} 2. 22 মি.^{2} 3. 95 মি.^{2} 4 ডেসিমি.^{2} 4. 165 মি.^{2}

5. 72 মি.^{2} 5 ডেসিমি.^{2} 6. 1 হে.মি.^{2} 10 মি.^{2} 88 ডেসিমি.^{2}

7. 7 ডেসিমি. 8. 3 মি. 5 ডেসিমি. 9. 9 ডেসিমি.

10. 1 মি.^{2} 54 ডেসিমি.^{2} 11. 22 মি.^{2} 88 ডেসিমি.^{2} 12. 1 মি.

13. 5000 সে.মি.^{3} 14. 1 মি. 4 ডেসিমি., 2 মি. 1 ডেসিমি.

15. 1320 টাকা 16. 1 : 2 17. 1 : 1 18. 4

প্রশ্নমালা 12

1. 2464 মি.^{2} 2. 1 হে.মি.^{2} 54 ডেকামি.^{2} 3. 55 মি.^{2} 44 ডেসিমি.^{2}

4. 24 মি.^{2} 64 ডেসিমি.^{2} 5. 616 সে.মি.^{2} 6. 7 ডেসিমি.

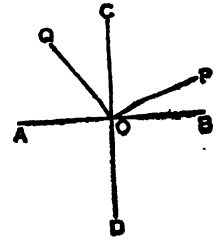
7. 616 সে.মি.^{2} 8. 154 সে.মি.^{2} 9. 27 মি.^{2} 72 ডেসিমি.^{2}

10. $122\frac{4}{7}$ মি.^{2} 11. 1716 টাকা 12. 143 টাকা

আদর্শ

1. ত্রিকোণ অর্থ ত্রিভুজ এবং মিতি অর্থ পরিমাপ। সুতরাং গণিতশাস্ত্রের যে শাখায় ত্রিভুজের কোণ ও বাহুর পরিমাপ বিষয়ে এবং উহাদের পরস্পর সম্বন্ধ বিষয়ে আলোচিত হয়, তাহাকে **ত্রিকোণমিতি** (Trigonometry) বলে। উহা সামতলিক জ্যামিতির একটি শাখা হইলেও ইহার আলোচ্য বিষয় ব্যাপকতর।

2. **জ্যামিতিক কোণ ও ত্রিকোণমিতিক কোণ।**

AB ও CD সরলরেখা দুইটি O বিন্দুতে পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করিয়াছে। একটি সরলরেখা OP, O বিন্দুতে সংলগ্ন থাকিয়া OB অবস্থান হইতে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে (Anti-clockwise) ঘুরিতে আরম্ভ করিল। ঘুরিয়া OP যখন OCর অবস্থানে আসিবে তখন উৎপন্ন কোণের পরিমাণ 1 সমকোণ বা 90 ডিগ্রী হইবে, যখন OAর অবস্থানে আসিয়া OBর সহিত একই সরলরেখায় থাকিবে তখন উৎপন্ন কোণের পরিমাণ 2 সমকোণ বা 180 ডিগ্রী হইবে, যখন ODর অবস্থানে আসিবে তখন উৎপন্ন কোণের পরিমাণ 3 সমকোণ বা 270 ডিগ্রী হইবে এবং যখন পুরা একবার ঘুরিয়া OBর অবস্থানে আসিবে তখন উৎপন্ন কোণের পরিমাণ 4 সমকোণ বা 360 ডিগ্রী হইবে। এইরূপ পুরা দুইবার ঘুরিবার পর আরও ঘুরিয়া OQর অবস্থানে আসিলে উৎপন্ন কোণের পরিমাণ 8 সমকোণ+ $\angle BOQ$ হইবে।

আবার, OP যদি O বিন্দুতে সংলগ্ন থাকিয়া OB অবস্থান হইতে ঘড়ির কাঁটার গতিক্রমে (Clockwise) ঘুরিতে থাকে, তবে উহা OBর সহিত যে সকল কোণ উৎপন্ন করিবে তাহারা সবই ঋণাত্মক হইবে। সুতরাং

জ্যামিতিক কোণ 4 সমকোণ পর্যন্ত হইতে পারে কিন্তু ত্রিকোণমিতিক কোণ 4 সমকোণ অপেক্ষাও অধিক হইতে পারে।

জ্যামিতিক কোণ সবই **ধনাত্মক** (Positive) কিন্তু ত্রিকোণমিতিক কোণ **ধনাত্মক** এবং **ঋণাত্মক** (Negative) উভয়ই হইতে পারে।

3. **কোণের পরিমাণ।** কোণের পরিমাণ প্রকাশ করিবার প্রণালী তিনটি। যথা, (1) **ষষ্টিক প্রণালী** (Sexagesimal system), (2) **শততমিক প্রণালী** (Centesimal system), এবং (3) **বৃত্তীয় প্রণালী** (Circular system)।

সকল সমকোণই পরস্পর সমান। উহা একটি ধ্রুবক (Constant) কোণ। এইজন্য সমকোণকে একটি একক ধরিয়া কোণের পরিমাণ প্রকাশ করা হইয়া থাকে।

ষষ্টিক প্রণালী : এই প্রণালীতে এক সমকোণকে 90 সমান অংশে ভাগ করিয়া প্রত্যেক অংশকে এক **ডিগ্রী** (Degree), এক ডিগ্রীকে 60 সমান অংশে

ভাগ করিয়া প্রত্যেক অংশকে এক **মিনিট** (Minute) এবং এক মিনিটকে 60 সমান অংশে ভাগ করিয়া প্রত্যেক অংশকে এক **সেকেণ্ড** (Second) বলা হয়। এক ডিগ্রী, এক মিনিট ও এক সেকেণ্ডকে যথাক্রমে 1°, $1'$ ও $1''$ লেখা হয়।

$\therefore$ 60 সেকেণ্ড $(60'') = 1$ মিনিট $(1')$
60 মিনিট $(60') = 1$ ডিগ্রী (1°)
90 ডিগ্রী $(90^\circ) = 1$ সমকোণ।

শততমিক প্রণালী : এই প্রণালীতে এক সমকোণকে 100 সমান অংশে বিভক্ত করিয়া প্রত্যেক অংশকে এক **গ্রেড** (Grade), এক গ্রেডকে 100 সমান অংশে বিভক্ত করিয়া প্রত্যেক অংশকে এক **মিনিট** (Minute) এবং এক মিনিটকে 100 সমান অংশে বিভক্ত করিয়া প্রত্যেক অংশকে এক **সেকেণ্ড** (Second) বলা হয়। এক গ্রেড, এক মিনিট ও এক সেকেণ্ডকে যথাক্রমে 1^g, $1^\grave{}$ ও $1^{\grave{}\grave{}}$ লেখা হয়।

$\therefore$ 100 সেকেণ্ড $(100^{\grave{}\grave{}}) = 1$ মিনিট $(1^\grave{})$
100 মিনিট $(100^\grave{}) = 1$ গ্রেড (1^g)
100 গ্রেড $(100^g) = 1$ সমকোণ।

দ্রষ্টব্য। উভয় প্রণালীতেই সমকোণ, মিনিট ও সেকেণ্ড রহিয়াছে। সমকোণ ধ্রুবক কোণ বলিয়া উভয় প্রণালীতে উহার মান একই কিন্তু মিনিট ও সেকেণ্ডের মান উভয় প্রণালীতে একরূপ নহে। তজ্জন্য মিনিট ও সেকেণ্ডের জন্য দুই প্রণালীতে দুই প্রকারের প্রতীক চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। প্রতীক চিহ্নগুলির পার্থক্য মনে রাখিবে।

4. লঘূকরণ। ষষ্টিক ও শততমিক প্রণালীতে প্রকাশিত রাশির লঘূকরণ পাটীগণিতের প্রণালীর ন্যায়।

উদা. 1. $12^\circ 0' 25''$ কে সেকেণ্ডে প্রকাশ কর।

$12^\circ 0' 25''$
60
―――
$720'$
60
―――
$43200''$
$25''$
―――
$43225''$ $\therefore$ $12^\circ 0' 25'' = 43225''$.

উদা. 2. $15^g 24^\grave{} 68^{\grave{}\grave{}}$ কে সেকেণ্ডে প্রকাশ কর।

$15^g 24^\grave{} 68^{\grave{}\grave{}}$
100
$1524^\grave{}$
100
―――
$152468^{\grave{}\grave{}}$

অথবা,
$15^g = 150000^{\grave{}\grave{}}$
$24^\grave{} = 2400^{\grave{}\grave{}}$
$68^{\grave{}\grave{}} = 68^{\grave{}\grave{}}$
―――
$152468^{\grave{}\grave{}}$

মন্তব্য। উদাহরণ 2 এর দ্বিতীয় সমাধান হইতে বুঝা যায়, মিনিটের বা সেকেণ্ডের সংখ্যার পূর্ণাংশে দুইটি অঙ্ক থাকিলে ঐ অঙ্ক দুইটি, একটি অঙ্ক থাকিলে 0 ও ঐ অঙ্কটি এবং কোন অঙ্ক না থাকিলে 00 লইয়া গ্রেডের সংখ্যার ডানে অঙ্কগুলিকে পর পর লিখিলে সেকেণ্ডের সংখ্যা অনায়াসে পাওয়া যায়। যেমন,

$24^g 15' 36'' = 241536''$, $42^g 8' 5'' = 420805''$, $123^g 6'' = 1230006''$, $268^g 8' = 2680800''$, $72^g 50' 8{\cdot}36'' = 725008{\cdot}36''$.

উদা. 3. 85764″ কে ডিগ্রী, মিনিট ও সেকেণ্ডে প্রকাশ কর।

```
6,0 | 8576,4″
6,0 | 142,9′—24″
    |  23°—49′
```

$\therefore$ $85764'' = 23^\circ 49' 24''$.

ব্যাখ্যা। 60 এবং 85764 এর 0 এবং 4 কে মনে মনে পরিত্যাগ করিয়া ভাগ কর, ভাগফল 1429 এবং ভাগশেষ 2 হইল; 2 এর ডানে পরিত্যক্ত 4 বসাও, প্রকৃত ভাগশেষ 24 হইল। আবার, 60 এবং 1429 এর 0 এবং 9 কে মনে মনে পরিত্যাগ করিয়া ভাগ কর, ভাগফল 23 এবং ভাগশেষ 4 হইল, 4 এর ডানে পরিত্যক্ত 9 বসাও, প্রকৃত ভাগশেষ 49 হইল।

উদা. 4 3548006″ কে গ্রেড, মিনিট ও সেকেণ্ডে প্রকাশ কর।

```
100 | 3548006″
100 | 35480′···6″
    |  354ᵍ···80′
```

$\therefore$ $3548006'' = 354^g 80' 6''$.

অথবা,

$3540000'' = 354^g$
$8000'' = 80'$
$6'' = 6''$

$\therefore$ $3548006'' = 354^g 80' 6''$

মন্তব্য। সমাধানটি হইতে বুঝা যায়, সেকেণ্ডের সংখ্যার এককাঙ্ক হইতে আরম্ভ করিয়া প্রথম দুইটি অঙ্কে সেকেণ্ড, তাহাদের বামের দুইটি অঙ্কে মিনিট, তাহাদের বামের দুইটি অঙ্কে গ্রেড এবং তাহাদের বামের অঙ্ক কয়টিতে সমকোণের সংখ্যা প্রকাশ করে।

$312034065{\cdot}8'' = 312$ সমকোণ $3^g 40' 65{\cdot}8''$.

উদা. 5. 51°23′24″ কে সমকোণে প্রকাশ কর।

$$51^\circ 23' 24'' = 51^\circ 23\tfrac{2}{5}' = 51^\circ 23{\cdot}4' = 51\frac{23{\cdot}4^\circ}{60} = 51{\cdot}39^\circ$$

$$= \frac{51{\cdot}39}{90} \text{ সমকোণ} = {\cdot}571 \text{ সমকোণ।}$$

মন্তব্য। 60 ও 90 দ্বারা ভাগ করিতে গিয়া ভাজ্যের দশমিক বিন্দুকে মনে মনে এক ঘর বামে সরাইয়া যথাক্রমে 6 ও 9 দ্বারা ভাগ করা হইয়াছে।

উদা. 6. $123^g 4' 75''$ কে সমকোণে প্রকাশ কর।

$123^g 4' 75'' = 1230475''$ [উদা. 2 এর মন্তব্য দেখ।]

$= 1{\cdot}230475$ সমকোণ [100^3 দ্বারা ভাগ করিয়া]

ডিগ্রী ও গ্রেডের পারস্পরিক সম্বন্ধ।

$90^\circ = 1$ সমকোণ এবং $100^g = 1$ সমকোণ ; $\therefore\ 90^\circ = 100^g$.

$$\therefore\quad 1^\circ = \frac{100^g}{90} = \frac{10^g}{9} \text{ এবং } 1^g = \frac{90^\circ}{100} = \frac{9^\circ}{10}.$$

$$\text{আবার, } \because\ 1^\circ = \frac{10^g}{9} = \left(1+\frac{1}{9}\right)^g \text{ এবং } 1^g = \frac{9^\circ}{10} = \left(1-\frac{1}{10}\right)^\circ,$$

$\therefore$ ডিগ্রীর সংখ্যার সহিত উহার $\frac{1}{9}$ অংশ যোগ করিলে গ্রেডের সংখ্যা পাওয়া যায় এবং গ্রেডের সংখ্যা হইতে উহার $\frac{1}{10}$ অংশ বিয়োগ করিলে ডিগ্রীর সংখ্যা পাওয়া যায়। যেমন,

$$27^\circ = (27 + 27 \text{ এর } \tfrac{1}{9})^g = (27+3)^g = 30^g$$

$$\text{এবং } 48^g = (48 - 48 \text{ এর } \tfrac{1}{10})^\circ = (48 - 4{\cdot}8)^\circ = 43{\cdot}2^\circ.$$

এক প্রণালীর মিশ্ররাশিকে অপর প্রণালীতে পরিবর্তন।

ডিগ্রী ও গ্রেডের পারস্পরিক সম্বন্ধ হইতে নিম্নের নিয়মটি পাওয়া যায়।

প্রথম নিয়ম। ষষ্টিক প্রণালীতে প্রকাশিত মিশ্ররাশিকে ডিগ্রীর দশমিকে পরিবর্তিত কর, তৎপর $1^\circ = (1+\frac{1}{9})^g$ ধরিয়া উহাকে গ্রেডের দশমিকে প্রকাশ করিয়া মিশ্ররাশিতে পরিণত কর।

শততমিক প্রণালীতে প্রকাশিত মিশ্ররাশিকে গ্রেডের দশমিকে পরিবর্তিত কর, তৎপর $1^g = (1-\frac{1}{10})^\circ$ ধরিয়া উহাকে ডিগ্রীর দশমিকে প্রকাশ করিয়া মিশ্ররাশিতে পরিণত কর।

উভয় প্রণালীতে সমকোণ রহিয়াছে এবং উহার মান উভয় প্রণালীতে একই ; স্থতরাং নিম্নের সাধারণ নিয়মটি পাওয়া যায়।

সাধারণ নিয়ম। প্রদত্ত মিশ্ররাশিটিকে সমকোণের দশমিকে পরিণত করিয়া অপর প্রণালীর মিশ্ররাশিতে পরিণত কর।

উদা. 7. $248^g 6' 25''$ কে ষষ্টিক প্রণালীতে প্রকাশ কর।

সাধারণ নিয়মে : $248^g 6' 25'' = 2480625''$ (উদা. 2 এর মন্তব্য দেখ।)

$= 2{\cdot}480625$ সমকোণ (100 দ্বারা ভাগ করিয়া)

$\times 90$

$43{\cdot}25625^\circ$ ($\cdot480625 \times 90$ লইয়া)

$\times 60$

$15{\cdot}375'$ ($\cdot25625 \times 60$ লইয়া)

60

$22{\cdot}5''$ ($\cdot375 \times 60$ লইয়া)

$\therefore\ 248^g 6' 25'' = 2$ সমকোণ $43^\circ 15' 22{\cdot}5''$.

উদা. 8. $63^\circ 32' 24''$ কে শতভমিক প্রণালীতে প্রকাশ কর।

প্রথম নিয়মে : $63^\circ 32' 24'' = 63^\circ 32\frac{24}{60}' = 63^\circ 32\tfrac{2}{5}' = 63^\circ 32\cdot4'$

$$= 63\frac{32\cdot4^\circ}{60} = 63\cdot54^\circ = (63\cdot54 \times \tfrac{10}{9})^g$$

$$= (7\cdot06 \times 10)^g = 70\cdot6^g = 70^g 60^{\backprime}$$

$$[\because \cdot6^g = (\cdot6 \times 100)^{\backprime}]$$

সাধারণ নিয়মে : $63^\circ 32' 24'' = 63\cdot54^\circ$ (পূর্বের ন্যায় করিয়া)

$= \frac{63\cdot54}{90}$ সমকোণ $= \cdot706$ সমকোণ

$$= (\cdot706 \times 100)^g = 70\cdot6^g = 70^g 60^{\backprime}.$$

উদা. 9. $65^\circ 40' 17\cdot4''$ কে গ্রেড, মিনিট ও সেকেণ্ডে প্রকাশ কর।

সাধারণ নিয়মে : $65^\circ 40' 17\cdot4'' = 65^\circ + \left(40 + \frac{17\cdot4}{60}\right)'$

$$= 65^\circ + (40 + \cdot29)' = 65^\circ 40\cdot29' = \left(65 + \frac{40\cdot29}{60}\right)^\circ$$

$= 65\cdot6715^\circ = \frac{65\cdot6715}{90}$ সমকোণ

$= \cdot72968\dot{3}$ সমকোণ

$\times 100$

$72\cdot968\dot{3}^g$

$\times 100$

$96\cdot8\dot{3}^{\backprime}$ ($\cdot968\dot{3} \times 100 = 96\cdot8\dot{3}$ লইয়া)

$\times 100$

$83\cdot\dot{3}^{\backprime\backprime}$ ($\cdot8\dot{3} \times 100 = \cdot83333\cdots \times 100$
$= 83\cdot333\cdots = 83\cdot\dot{3}$ লইয়া)

$$\therefore\ 65^\circ 40' 17\cdot4'' = 72^g\ 96^{\backprime}\ 83\cdot\dot{3}^{\backprime\backprime}.$$

প্রশ্নমালা 1

1. ষষ্টিক সেকেণ্ডে প্রকাশ কর :
   (*i*) $16^\circ 8' 36''$ (*ii*) $25^\circ 0' 56''$ (*iii*) $62\cdot54^\circ$ (*iv*) $\cdot324$ সমকোণ
2. শতভমিক সেকেণ্ডে প্রকাশ কর :
   (*i*) $24^g 40^{\backprime} 38^{\backprime\backprime}$ (*ii*) $108^g 0^{\backprime} 4\cdot2^{\backprime\backprime}$ (*iii*) $75\cdot8^g$ (*iv*) $\cdot072$ সমকোণ
3. ডিগ্রী, মিনিট ও সেকেণ্ডে প্রকাশ কর :
   (*i*) $12608''$ (*ii*) $58324''$ (*iii*) $92408\cdot5''$ (*iv*) $\cdot104$ সমকোণ
4. গ্রেড, মিনিট ও সেকেণ্ডে প্রকাশ কর :
   (*i*) $45\cdot324^g$ (*ii*) $52\cdot0805^g$ (*iii*) $60\cdot00705^g$ (*iv*) $\cdot052$ সমকোণ

5. সমকোণে প্রকাশ কর :

(*i*) $38^\circ52'48''$ (*ii*) $68^\circ37'30''$ (*iii*) $72^{g}3^{\backprime}40^{\backprime\backprime}$ (*iv*) $85^{g}32^{\backprime}5{\cdot}6^{\backprime\backprime}$

6. ষষ্টিক প্রণালীতে প্রকাশ কর :

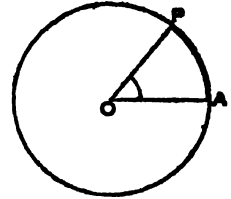
(*i*) $18^{g}25^{\backprime}$ (*ii*) $24^{g}27^{\backprime}50^{\backprime\backprime}$ (*iii*) $48^{g}6^{\backprime}5^{\backprime\backprime}$ (*iv*) $70^{g}15^{\backprime}37{\cdot}5^{\backprime\backprime}$

7. শতভমিক প্রণালীতে প্রকাশ কর :

(*i*) $24^\circ45'$ (*ii*) $35^\circ46'30''$ (*iii*) $68^\circ5'6''$ (*iv*) $72^\circ28'7{\cdot}5''$

8. একটি ত্রিভুজের দুই কোণ $55^\circ12'36''$ এবং $64^\circ47'24''$. তৃতীয় কোণটি শতভমিক মানে নির্ণয় কর। (C. U. 1950)

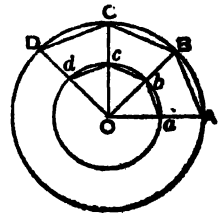
5. **কোণ পরিমাপের বৃত্তীয় প্রণালী।** বৃত্তীয় প্রণালীতে এক রেডিয়ানকে (Radian) একক ধরিয়া কোণ পরিমাপ করা হয়। এক রেডিয়ানকে একক ধরিলে কোন কোণের যে মান হয়, তাহাকে ঐ কোণের **বৃত্তীয় মান** (Circular measure) বলে। এক রেডিয়ান পরিমিত কোণ আঁকিবার প্রণালী দেওয়া গেল।

O কেন্দ্রীয় যে কোনও একটি বৃত্ত আঁক উহার পরিধিতে যে কোনও একটি বিন্দু A লও। ব্যাসার্ধের সমান করিয়া AP বৃত্তচাপ কাটিয়া লও। OA ও OP যোগ কর। তাহা হইলে AOP কোণের পরিমাণ এক রেডিয়ান হইবে। অতএব,

কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান বৃত্তচাপ বৃত্তটির কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে **এক রেডিয়ান** (1^c) বলে।

যে কোন বৃত্তের পক্ষে এক রেডিয়ানের মান $57^\circ17'44{\cdot}8''$ (প্রায়) ; ইহা একটি ধ্রুবক কোণ। প্রমাণ পরে দেওয়া হইবে।

6. **উপপাদ্য।** সমুদয় বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত ধ্রুবক।

[In all circles the ratio of the circumference to its diameter is constant.]

O কে কেন্দ্র করিয়া যে কোনও দুইটি বৃত্ত আঁক। বৃহত্তর বৃত্তে n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট ABCD ··· সুষম বহুভুজটি আঁক। OA, OB, OC, OD, ··· যোগ কর। উহারা যেন ক্ষুদ্রতর বৃত্তকে যথাক্রমে a, b, c, d, ··· বিন্দুতে ছেদ করিল। ab, bc, cd, ··· যোগ কর। তাহা হইলে ক্ষুদ্রতর বৃত্তে n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজ অন্তর্লিখিত হইল।

প্রমাণ। $\because$ OAB এবং Oab ত্রিভুজদ্বয়ের

$\frac{OA}{Oa}=\frac{OB}{Ob}$ এবং $\angle AOB=\angle aOb$;

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ, $\therefore \frac{AB}{ab}=\frac{OA}{Oa}$

$$\therefore \frac{ABCD\cdots \text{ বহুভুজের পরিসীমা}}{abcd\cdots \text{ বহুভুজের পরিসীমা}}=\frac{n.AB}{n.ab}=\frac{AB}{ab}=\frac{OA}{Oa}=\frac{2OA}{2Oa}$$

$$\therefore \frac{ABCD\cdots \text{ বহুভুজের পরিসীমা}}{abcd\cdots \text{ বহুভুজের পরিসীমা}}=\frac{\text{বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাস}}{\text{ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাস}}\cdots(1)$$

এখন, বহুভুজদ্বয়ের বাহুসংখ্যা n যতই অধিক হইবে, উহাদের বাহুগুলি ততই ছোট হইবে এবং যখন n অসীম হইবে, তখন প্রত্যেকটির বাহুগুলি উহার পরিলিখিত বৃত্তের পরিধির সহিত মিলিয়া গিয়া এক হইয়া যাইবে।

$$\therefore (1) \text{ হইতে, } \frac{\text{বৃহত্তর বৃত্তের পরিধি}}{\text{ক্ষুদ্রতর বৃত্তের পরিধি}}=\frac{\text{বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাস}}{\text{ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাস}},$$

$$\therefore \frac{\text{বৃহত্তর বৃত্তের পরিধি}}{\text{বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাস}}=\frac{\text{ক্ষুদ্রতর বৃত্তের পরিধি}}{\text{ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাস}};$$

$\therefore$ কোন বৃত্তের আকার যাহাই হউক না কেন, উহার

$$\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}}=\text{একটি ধ্রুবক রাশি।}$$

7. কোন বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাতসূচক ধ্রুবক রাশিটিকে খণ্ড বা অখণ্ড কোন সংখ্যা দ্বারাই সঠিকভাবে প্রকাশ করা যায় না। ইহা একটি অমেয় রাশি। ইহাকে গ্রীসদেশীয় অক্ষর π (পাই) দ্বারা প্রকাশ করা হইয়া থাকে।

$$\therefore \frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}}=\pi, \text{ বা } \frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাসার্ধ}}=2\pi$$

$\therefore$ পরিধি$=$ব্যাস$\times\pi$, বা পরিধি$=$ব্যাসার্ধ$\times 2\pi$.

8. π এর 8 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধমান 3·14159265 এবং 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধমান 3·1416.

$\frac{22}{7}=3·14285\cdots$; সুতরাং $\frac{22}{7}$-এর তুল্যমান দশমিকটি π এর 2 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধমান প্রকাশ করে।

$\frac{355}{113}=3·14159203\cdots$; সুতরাং $\frac{355}{113}$ এর তুল্যমান দশমিকটি π এর 6 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধমান প্রকাশ করে।

কোন প্রশ্নে π এর মান দেওয়া না থাকিলে, উহার মান সাধারণতঃ $\frac{22}{7}$ বা 3·1416 ধরিয়া প্রশ্নটির সমাধান করা হয়।

10 দশমিক স্থান পর্যন্ত $\frac{1}{\pi}$ এর মান$=$·3183098862$\cdots$.

মন্তব্য। $\frac{355}{113}$ ভগ্নাংশটিকে মনে রাখিবার জন্য, প্রথম তিনটি বিযুগ্ম সংখ্যার প্রত্যেকটিকে দুইবার করিয়া লও, 113355 হইল। তাহা হইলে, প্রথম তিনটি অঙ্কে ভগ্নাংশটির হর এবং শেষ তিনটি অঙ্কে লব প্রকাশ করিবে।

উদাহরণ। একটি বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ কত হইলে একজন ক্রীড়াবিদ উহার চারিধারে 4 বার দৌড়াইয়া এক মাইল অতিক্রম করিবে? $(\pi = \frac{22}{7})$

বৃত্তাকার পথের পরিধি $= 1760$ গজ $\times \frac{1}{4} = 440$ গজ

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ r গজ হইলে, $2\pi r = 440$, বা $2 \times \frac{22}{7} \times r = 440$.

$\therefore \quad r = 440 \times \frac{7}{2 \times 22} = 70$

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ 70 গজ।

প্রশ্নমালা 2

1. পৃথিবীর ব্যাস 8000 মাইল হইলে উহার পরিধি কত? $(\pi = \frac{22}{7})$

2. একটি গাড়ীর চাকার ব্যাসার্ধ 2 ফুট এবং উহা এক সেকেণ্ডে 4 বার ঘুরে গাড়ীখানির ঘণ্টাপ্রতি গতিবেগ মাইলে নির্ণয় কর। $(\pi = \frac{22}{7})$

3. একটি বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ কত হইলে এক ব্যক্তি উহার চারিধারে 6 বার চলিয়া এক মাইল অতিক্রম করিবে? $(\pi = \frac{22}{7})$

4. একটি চাকার ব্যাস 7 ফুট এবং ইহা প্রতি 2 সেকেণ্ডে 3 বার ঘুরে। এক ঘণ্টায় উহা কত মাইল যাইবে? $(\pi = \frac{22}{7})$

5. একটি ঘড়ির বড় কাঁটা 2 ফুট 4 ইঞ্চি লম্বা। 20 মিনিটে উহার প্রান্ত কত ইঞ্চি চলিবে? $(\pi = 3{\cdot}1416)$ (C. U. 1948)

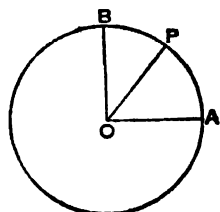
9. উপপাদ্য। এক রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।

[A radian is a constant angle.]

মনে কর, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AP চাপ = OA ব্যাসার্ধ $= r$.

সুতরাং $\angle AOP = 1$ রেডিয়ান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle AOP$ ধ্রুবক।

OA-র উপর OB লম্ব আঁক; উহা যেন বৃত্তটির পরিধিকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে AB চাপ $= \frac{1}{4}$ পরিধি $= \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{1}{2}\pi r$.

প্রমাণ। কোন বৃত্তের চাপসমূহের অনুপাত উহাদের সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণসমূহের অনুপাতের সমান।

$$\therefore \quad \frac{\angle AOP}{\angle AOB} = \frac{\text{চাপ } AP}{\text{চাপ } AB} = \frac{r}{\frac{1}{2}\pi r} = \frac{2}{\pi}$$

$$\therefore \quad \angle AOP = \angle AOB \times \frac{2}{\pi} = 1 \text{ সমকোণের } \frac{2}{\pi}$$

$$\therefore \quad \text{এক রেডিয়ান} = 1 \text{ সমকোণের } \frac{2}{\pi} \text{ বা } \frac{2}{\pi} \text{ সমকোণ।}$$

এখন, 1 সমকোণ একটি ধ্রুবক কোণ এবং π একটি ধ্রুবক রাশি (অনু. 6),

$\therefore$ এক রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।

10. রেডিয়ানের মান।

$$1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{2}{\pi} \text{ সমকোণ} = \frac{180^\circ}{\pi} = 180^\circ \times \frac{113}{355} \; (\pi = \tfrac{355}{113} \text{ ধরিয়া})$$

$$= \frac{4068^\circ}{71} = 57\frac{21^\circ}{71} = 57^\circ \frac{21 \times 60'}{71} = 57^\circ 17\frac{53'}{71}$$

$$= 57^\circ 17' \frac{53 \times 60''}{71} = 57^\circ 17' 44{\cdot}78 \cdots'' = 57^\circ 17' 44{\cdot}8'' \text{ (প্রায়)।}$$

11. ডিগ্রী ও রেডিয়ানের পরস্পর সম্বন্ধ।

$\because \; \frac{2}{\pi}$ সমকোণ $= 1$ রেডিয়ান (অনু. 9) ;

$\therefore$ 2 সমকোণ বা $180^\circ = \pi$ রেডিয়ান,

1 সমকোণ বা $90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ রেডিয়ান,

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান এবং 1 রেডিয়ান $= \frac{180^\circ}{\pi}$.

মন্তব্য। πএ একটি সংখ্যা এবং π^c এ π রেডিয়ান প্রকাশ করে। কোন কোন স্থলে 'রেডিয়ান' বা উহার চিহ্ন 'c' উহ্য রাখা হয়। সুতরাং কোন কোণের পরিমাণ π বলিলে π রেডিয়ান বা π^c বুঝিবে। যেমন, বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$, এস্থলে π একটি সংখ্যা এবং $\sin \pi$, এস্থলে $\pi = 180^\circ$.

12. ডিগ্রী, গ্রেড ও রেডিয়ানের পরস্পর সম্বন্ধ।

$90^\circ = 1$ সমকোণ, $100^g = 1$ সমকোণ এবং $\frac{1}{2}\pi^c = 1$ সমকোণ ;

$\therefore \; 90^\circ = 100^g = \frac{1}{2}\pi^c$, বা $180^\circ = 200^g = \pi^c$.

13. এক প্রণালী হইতে অন্য প্রণালীতে পরিবর্তন।

$\because \; 180^\circ = 200^g = \pi^c$;

$\therefore \; 1^\circ = \frac{10^g}{9} = \frac{\pi^c}{180}$ (180 দ্বারা ভাগ করিয়া),

$1^g = \frac{9^\circ}{10} = \frac{\pi^c}{200}$ (200 দ্বারা ভাগ করিয়া),

$1^c = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{200^g}{\pi}$ (π দ্বারা ভাগ করিয়া)।

উদা. 1. (*i*) 63°, (*ii*) $50^\circ 24'$ ও (*iii*) $37^g 50'$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

(*i*) $\because \; 180^\circ = \pi^c$, $\therefore \; 1^\circ = \frac{1}{180}\pi^c \; \therefore \; 63^\circ = \frac{63}{180}\pi^c = \frac{7}{20}\pi^c$.

(ii) $50°24' = 50\frac{2}{5}° = \frac{252}{5}°$

$\because$ $1° = \frac{1}{180}\pi^c$, $\therefore$ $50°24' = \frac{1}{180}\pi^c \times \frac{252}{5} = \frac{7}{25}\pi^c$.

(iii) $37^g 50' = 37\frac{1}{2}^g = \frac{75^g}{2}$

$\because$ $200^g = \pi^c$, $\therefore$ $1^g = \frac{1}{200}\pi^c$ $\therefore$ $37^g 50' = \frac{1}{200}\pi^c \times \frac{75}{2} = \frac{3}{16}$

উদা. 2. $\frac{15}{32}\pi$ রেডিয়ানকে ডিগ্রী, মিনিট ও সেকেণ্ডে প্রকাশ কর।

$\because$ π রেডিয়ান $= 180°$, $\therefore$ $\frac{15}{32}\pi$ রেডিয়ান $= \frac{15}{32} \times 180° = 84°22'30$

উদা. 3. (i) $\frac{5}{6}\pi^c$ ও (ii) $\frac{7}{8}\pi^c$ কে ষষ্টিক প্রণালীতে প্রকাশ কর।

(i) $\because$ $1^c = \frac{180°}{\pi}$, $\therefore$ $\frac{5}{6}\pi^c = \frac{180°}{-} \times \frac{5}{6}\pi = 150°$.

(ii) $\because$ $1^c = \frac{180°}{\pi}$, $\therefore$ $\frac{7}{8}\pi^c = \frac{180°}{\pi} \times \frac{7}{8}\pi = 157\frac{1}{2}° = 157°30'$.

উদা. 4. $\frac{5}{12}\pi^c$ কে শততমিক প্রণালীতে প্রকাশ কর।

$\because$ $1^c = \frac{200^g}{\pi}$, $\therefore$ $\frac{5}{12}\pi^c = \frac{200^g}{\pi} \times \frac{5}{12}\pi = \frac{250^g}{3} = 83{\cdot}3333333\cdots^g$

$= 83^g 33' 33{\cdot}333 \cdots'' = 83^g 33' 33{\cdot}\dot{3}''$.

উদা. 5. একটি কোণের ডিগ্রী ও গ্রেডের সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 152. কোণটির বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।

কোণটির ডিগ্রীর সংখ্যা যেন x. $\therefore$ উহার গ্রেডের সংখ্যা $= \frac{10}{9}x$.

$\therefore$ সর্তানুসারে, $x + \frac{10}{9}x = 152$, বা $9x + 10x = 1368$,

বা $19x = 1368$ $\therefore$ $x = 72$.

$\therefore$ কোণটি $= 72° = \frac{72}{180}\pi^c = \frac{2}{5}\pi^c$.

উদা. 6. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের অন্তর $\frac{1}{9}\pi$ রেডিয়ান। কোণগুলিকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

মনে কর, ABC সমকোণী ত্রিভুজের A সমকোণ, B ও C সূক্ষ্মকোণ এবং B কোণ > C কোণ।

$\because$ $\angle A = 1$ সমকোণ $= 90°$, $\therefore$ $\angle B + \angle C = 180° - 90° = 90° \cdots (1)$

$\angle B - \angle C = \frac{1}{9}\pi^c = \frac{1}{9} \times 180° = 20° \cdots (2)$

(1) ও (2) যোগ করিয়া, $2\angle B = 100°$ $\therefore$ $\angle B = 55°$.

$\therefore$ (1) হইতে, $\angle C = 90° - 55° = 35°$.

উদা. 7. দুইটি কোণের সমষ্টি 135° এবং অন্তর 90°. কোণদ্বয়ের পরিমাণ রেডিয়ানে নির্ণয় কর।

বৃহত্তর কোণটি $= \frac{1}{2}(135° + 90°) = 112\frac{1}{2}°$

এবং ক্ষুদ্রতর কোণটি $= 135° - 112\frac{1}{2}° = 22\frac{1}{2}°$.

$\therefore$ একটি কোণ $=112\frac{1}{2}^\circ=\frac{225}{2}\times\frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $=\frac{5}{8}\pi$ রেডিয়ান

এবং অপর কোণটি $=22\frac{1}{2}^\circ=\frac{45}{2}\times\frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $=\frac{\pi}{8}$ রেডিয়ান।

উদা. 8. একটি ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 2 : 5 : 3. বৃহত্তম কোণটির বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর। (C. U. 1942)

ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $=180^\circ$,

$\therefore$ বৃহত্তম কোণ $=180^\circ\times\frac{5}{2+5+3}=90^\circ=\frac{1}{2}\pi$ রেডিয়ান।

উদা. 9. দুইটি কোণের অনুপাত 3 : 5 এবং উহাদের অন্তর 18°. কোণগুলিকে গ্রেডে নির্ণয় কর।

মনে কর, কোণ দুইটি যথাক্রমে $3x^\circ$ এবং $5x^\circ$.

$\therefore\ 5x^\circ-3x^\circ=18^\circ \quad \therefore\ 2x^\circ=18^\circ \quad \therefore\ x^\circ=9^\circ.$

$\therefore$ একটি কোণ $=3x^\circ=27^\circ=(27\times\frac{10}{9})^g=30^g$

এবং অপর কোণ $=5x^\circ=45^\circ=(45\times\frac{10}{9})^g=50^g$.

উদা. 10. একটি ত্রিভুজের এক কোণ 70^g এবং আর এক কোণ $\frac{1}{4}\pi$ রেডিয়ান। তৃতীয় কোণটিকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

ত্রিভুজটির প্রথম কোণ $=70^g$ এবং দ্বিতীয় কোণ $=\frac{1}{4}\pi^c=\frac{1}{4}\times200^g=50^g$.

$\therefore$ তৃতীয় কোণ $=(200\ \ -70^g-50^g)$

$=80^g=(80\times\frac{9}{10})^\circ=72^\circ.$

উদা. 11. একটি ত্রিভুজের দুই কোণের বৃত্তীয় মান $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{3}$. তৃতীয় কোণের ডিগ্রী ও মিনিটের সংখ্যা নির্ণয় কর। (H. S. 1962)

2 সমকোণ $=\frac{22}{7}$ রেডিয়ান ; তৃতীয় কোণ $=(\frac{22}{7}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2})$ রেডিয়ান

$=\frac{97}{42}$ রেডিয়ান $=\frac{97}{42}\times180^\circ\times\frac{7}{22}\ \ (\because\ \frac{22}{7}^c=180^\circ)$

$=\frac{1455}{11}^\circ=132\frac{3}{11}^\circ=132^\circ16'36''.$

উদা. 12. সুষম অষ্টভুজের একটি কোণকে ডিগ্রী ও রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

সুষম অষ্টভুজের 8 কোণের সমষ্টি $=(2\times$ ভুজসংখ্যা $-4)$ সমকোণ

$=(2\times8-4)$ সমকোণ $=12$ সমকোণ $=1080^\circ$

$\therefore$ এক কোণ $=1080^\circ\div8=135^\circ$ এবং $135^\circ=\frac{135}{180}\pi\ =\frac{3}{4}\pi^c$

$\therefore$ কোণটি $=135^\circ$ ও $\frac{3}{4}\pi^c$.

উদা. 13. একটি কোণের ডিগ্রীর সংখ্যা x এবং রেডিয়ানের সংখ্যা y. দেখাও যে, $\frac{x}{90}=\frac{2y}{\pi}$.

একই কোণের পরিমাণ x° এবং y^c ; $\therefore\ x^\circ=y^c$.

এখন, $x^\circ=\frac{x}{90}$ সমকোণ এবং $y^c=\frac{2y}{\pi}$ সমকোণ ($\because\ 1^c=\frac{180}{\pi}$ সমকোণ)

$$\therefore\ \frac{x}{90}=\frac{2y}{\pi}.$$

উদা. 14. একটি কোণের ডিগ্রী, গ্রেড ও রেডিয়ানের সংখ্যা যথাক্রমে x, y ও z. দেখাও যে, $\frac{x}{90}=\frac{y}{100}=\frac{2z}{\pi}$. (C. U. 1941, '45 ; G. U. 1951)

একই কোণের পরিমাণ x°, y^g, z^c ; $\therefore \quad x^\circ=y^g=z^c$.

এখন, $x^\circ=\frac{x}{90}$ সমকোণ, $y^g=\frac{y}{100}$ সমকোণ এবং $z^c=\frac{2z}{\pi}$ সমকোণ ;

$$\therefore \quad \frac{x}{90}=\frac{y}{100}=\frac{2z}{\pi}.$$

উদা. 15. $1/\pi=\cdot31831$ ধরিয়া দেখাও যে, এক রেডিয়ানে প্রায় 206265 সেকেণ্ড। (G. U. 1948)

$\because \quad \pi$ রেডিয়ান $=180$ ডিগ্রী ;

$\therefore \quad 1$ রেডিয়ান $=180\times\cdot31831$ ডিগ্রী $=180\times\cdot31831\times60\times60$ সেকেণ্ড
$=206264{\cdot}88$ সেকেণ্ড $=206265$ সেকেণ্ড (আসন্ন)।

উদা. 16. দুইটি কোণের অন্তর 8°. যদি একটির ডিগ্রীসংখ্যা অপরটির গ্রেড-সংখ্যার সমান হয়, তবে কোণদ্বয়ের বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।

মনে কর, একটি কোণ x°. তাহা হইলে, অপর কোণটি $=x^g=\frac{9}{10}x^\circ$.

সর্তানুসারে, $x^\circ-\frac{9}{10}x^\circ=8^\circ$, বা $\frac{1}{10}x=8 \quad \therefore \quad x=80$

$\therefore$ একটি কোণ $=80^\circ=\frac{80}{180}\pi^c=\frac{4}{9}\pi^c$

এবং অপর কোণ $=80^g=\frac{80}{200}\pi^c=\frac{2}{5}\pi^c$.

উদা. 17. একটি ত্রিভুজের এক কোণ 78° এবং আর এক কোণ $\frac{1}{6}\pi$ রেডিয়ান। তৃতীয় কোণটিকে শতভমিক মানে প্রকাশ কর।

প্রথম কোণ $=78^\circ$ এবং দ্বিতীয় কোণ $=\frac{1}{6}\pi^c=\frac{1}{6}\times180^\circ=30^\circ$;

$\therefore$ তৃতীয় কোণ $=180^\circ-(78^\circ+30^\circ)=72^\circ=(72\times\frac{10}{9})^g=80^g$.

উদা. 18. $\frac{1}{2}\pi$ রেডিয়ানকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন প্রথম অংশের ডিগ্রীসংখ্যার এবং দ্বিতীয় অংশের রেডিয়ানসংখ্যার অনুপাত $36:\pi$ হয়। প্রত্যেক অংশকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

মনে কর, প্রথম অংশ $=36x$ ডিগ্রী। তাহা হইলে, দ্বিতীয় অংশ $=\pi x$ রেডিয়ান $=\pi x\times\frac{180}{\pi}$ ডিগ্রী $=180x$ ডিগ্রী।

$\therefore$ প্রথম অংশ : দ্বিতীয় অংশ $=36x : 180x=1:5$.

$\therefore$ প্রথম অংশ $=\frac{1}{2}\pi^c\times\frac{1}{1+5}=90^\circ\times\frac{1}{6}=15^\circ$

এবং দ্বিতীয় অংশ $=\frac{1}{2}\pi^c\times\frac{5}{1+5}=90^\circ\times\frac{5}{6}=75^\circ$.

উদা. 19. 4টা ও 5টার মধ্যে কোন্ সময়ে ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটার ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণ 84° হয় ?

∵ ঘড়ির ডায়ালের পরিধি কেন্দ্রে 360° কোণ উৎপন্ন করে ; সুতরাং পরিধির $\frac{1}{60}$ বা এক মিনিট-ঘর কেন্দ্রে 6° কোণ উৎপন্ন করে। কাজেই কাঁটা দুইটির ব্যবধান যখন (84÷6) বা 14 মিনিট-ঘর হইবে, তখন উহারা 84° কোণ উৎপন্ন করিবে। 4টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা 20 মিনিট-ঘর পিছনে থাকে ; সুতরাং মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা (20 − 14) মিনিট-ঘর ও (20 + 14) মিনিট-ঘর অর্থাৎ 6 মিনিট-ঘর ও 34 মিনিট-ঘর অধিক গেলে উহারা 84° কোণ উৎপন্ন করে। এখন, মিনিটের কাঁটা 12 মিনিট-ঘর গেলে ঘণ্টার কাঁটা 1 মিনিট-ঘর যায়।

∴ মিনিটের কাঁটা 11 মিনিট-ঘর অধিক যায় 12 মিনিটে

∴ … … 6 … … … … $\frac{12 \times 6}{11}$ বা $6\frac{6}{11}$ মিনিটে

এবং … … 34 … … … … $\frac{12 \times 34}{11}$ বা $37\frac{1}{11}$ মিনিটে।

∴ নির্ণেয় সময় 4টা $6\frac{6}{11}$ মিনিট ও 4টা $37\frac{1}{11}$ মিনিট।

প্রশ্নমালা 3

রেডিয়ানে প্রকাশ কর :

1. $72°$ 2. $93^g 75'$ 3. $50°37'30''$ 4. $78^g 12' 50''$

ডিগ্রী, মিনিট ও সেকেণ্ডে প্রকাশ কর :

5. $\frac{1}{3}\pi^c$ 6. $\frac{7}{8}\pi^c$ 7. $\frac{21}{32}\pi^c$ 8. $\frac{25}{81}\pi^c$

শততমিক মানে প্রকাশ কর :

9. $\frac{5}{8}\pi^c$ 10. $\frac{9}{16}\pi^c$ 11. $\frac{7}{12}\pi^c$ 12. $\frac{13}{48}\pi^c$

13. (*i*) 1^c কে ষষ্টিক মানে প্রকাশ কর। $(\pi = \frac{22}{7})$ (H. S. 1960)

(*ii*) যে কোণের বৃত্তীয় মান 1·309, তাহার পরিমাণ কত ডিগ্রী ? $(\pi = 3{\cdot}1416)$ (C. U. 1948)

14. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি শীর্ষকোণের বার গুণ। উহার সমুদয় কোণগুলিকে ডিগ্রী, মিনিট ও গ্রেডে প্রকাশ কর। (C. U. 1946)

15. একটি চতুর্ভুজের কোণগুলি $x°$, $60°$, 60^g ও $\frac{5}{6}\pi^c$. x নির্ণয় কর। (B. U.)

16. একটি সুষম দশভুজের একটি কোণকে ডিগ্রী, গ্রেড ও রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

17. একটি সুষম n-ভুজের একটি অন্তঃকোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর। (C. U.)

18 দেখাও যে, একটি সুষম দশভুজের একটি কোণের ডিগ্রীসংখ্যার এবং একটি সুষম পঞ্চভুজের একটি কোণের গ্রেডসংখ্যার অনুপাত 6 : 5. (C. U. 1950)

19. দুইটি কোণের সমষ্টি 135° এবং অন্তর 30^g. কোণ দুইটিকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। (G. U. 1950)

20. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের অন্তর $\frac{2}{5}\pi$ রেডিয়ান। কোণ দুইটিকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

21. দুইটি কোণের সমষ্টি 114°. যদি একটির পরিমাণ যত গ্রেড অপরটির পরিমাণ তত ডিগ্রী হয়, তবে কোণদ্বয়ের বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর। (C. U. 1943)

22. একটি ত্রিভুজের এক কোণ 60° এবং দ্বিতীয় কোণ $\frac{1}{4}\pi$ রেডিয়ান। তৃতীয় কোণকে শততমিক মানে প্রকাশ কর। (C. U. 1947)

23. একটি ত্রিভুজের এক কোণ $\frac{3}{10}\pi^c$ এবং আর এক কোণ 70^g. তৃতীয় কোণটিকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর। (C. U.)

24. একটি ত্রিভুজের এক কোণ 63° এবং আর এক কোণ 80^g. তৃতীয় কোণটি কত রেডিয়ান ?

25. একটি ত্রিভুজের তিন কোণ $\frac{3}{4}x$ ডিগ্রী, $\frac{5}{2}x$ গ্রেড এবং $\frac{1}{120}\pi x$ রেডিয়ান। কোণগুলিকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

26. একটি ত্রিভুজের তিন কোণের অনুপাত 2 : 3 : 4. ক্ষুদ্রতম কোণটির বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।

27. একটি কোণের ডিগ্রীসংখ্যা D এবং রেডিয়ানসংখ্যা C হইলে দেখাও যে,

$$\frac{D}{180}=\frac{\pi}{\pi} \qquad \text{(C. U. 1947 ; D. B. 1950)}$$

28. প্রমাণ কর যে,

$$x^\circ=\frac{10x^g}{9}=\frac{\pi x^c}{180}, \quad y^g=\frac{9y^\circ}{10}=\frac{\pi y^c}{200}, \quad z^c=\frac{180z^\circ}{\pi}=\frac{200z^g}{\pi}.$$

29. যদি একটি কোণের ডিগ্রীসংখ্যা D, গ্রেডসংখ্যা G এবং রেডিয়ানসংখ্যা C হয়, তবে দেখাও যে,

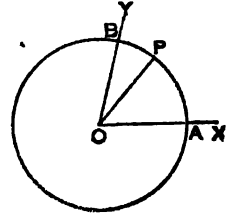
$$\frac{D}{90}=\frac{G}{100}=\frac{2C}{\pi}.$$

30. 100 ডিগ্রীকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন প্রথমটির ডিগ্রীসংখ্যার এবং দ্বিতীয়টির রেডিয়ানসংখ্যার অনুপাত $20 : \pi$ হয়।

31. সকাল 9টা 30 মিনিটে ঘড়ির দুইটি কাঁটা যে কোণে থাকে, তাহাকে বৃত্তীয় মানে প্রকাশ কর। (C. U. 1948)

32. অপরাহ্ণ 1টা ও 2টার ভিতর কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা দুইটির অন্তর্গত কোণ 168° হয়। (C. U. 1951)

14. উপপাদ্য। কোন বৃত্তের কোন চাপকে লব এবং ব্যাসার্ধকে হর ধরিলে যে ভগ্নাংশ হয়, তাহা ঐ চাপের সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণের রেডিয়ানসংখ্যা হইবে।

মনে কর, XOY যে কোনও একটি কোণ। ইহার রেডিয়ানসংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে। O কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর; উহা যেন OX কে A বিন্দুতে এবং OY কে B বিন্দুতে ছেদ করিল। ব্যাসার্ধ OAর সমান করিয়া AP চাপ কাটিয়া লও এবং OP যোগ কর। তাহা হইলে ∠AOP = 1 রেডিয়ান হইল। এখন, ∵ কোন বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণসমূহের অনুপাত, উহারা যে চাপসমূহের উপর অবস্থিত তাহাদের অনুপাতের সমান,

$$\therefore \frac{\angle AOB}{\angle AOP} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } AP} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{ব্যাসার্ধ } OA}$$

$$\angle AOB = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{ব্যাসার্ধ } OA} \times \angle AOP = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{ব্যাসার্ধ } OA} \text{ রেডিয়ান।}$$

। ∠AOB = θ রেডিয়ান, চাপ AB = s এবং ব্যাসার্ধ OA = r হইলে,

$$\theta \text{ রেডিয়ান} = \frac{s}{r} \text{ রেডিয়ান,}$$

∴ (1) $\theta = \frac{s}{r}$, যেখানে θ হইল রেডিয়ানসংখ্যা, (2) $r = \frac{s}{\theta}$ এবং (3) $s = \theta r$.

অতএব, (1) কেন্দ্রস্থ কোণের রেডিয়ানসংখ্যা = চাপ ÷ ব্যাসার্ধ,

(2) ব্যাসার্ধ = চাপ ÷ কেন্দ্রস্থ কোণের রেডিয়ানসংখ্যা

এবং (3) চাপ = কেন্দ্রস্থ কোণের রেডিয়ানসংখ্যা × ব্যাসার্ধ।

উদা. 1. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 7 সেন্টিমিটার। 5 সেন্টিমিটার দীর্ঘ চাপ কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহা ডিগ্রীতে নির্ণয় কর। $(\pi = \frac{22}{7})$

কোণটির রেডিয়ানসংখ্যা = চাপ ÷ ব্যাসার্ধ = $\frac{5}{7}$

∴ কোণটি = $\frac{5}{7}$ রেডিয়ান = $\frac{5}{7} \times \frac{180}{\pi}$ ডিগ্রী (∵ $\pi^c = 180°$)

$= \frac{5}{7} \times \frac{180 \times 7}{22}$ ডিগ্রী = $40\frac{10}{11}$ ডিগ্রী।

উদা. 2. কোন বৃত্তের 6 মিটার 27 সেন্টিমিটার পরিমিত একটি চাপ কেন্দ্রে 1·9 রেডিয়ানবিশিষ্ট একটি কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ সেন্টিমিটারে নির্ণয় কর।

নির্ণেয় ব্যাসার্ধ = $\frac{s}{\theta}$, যেখানে s = 6 মিটার 27 সেন্টিমিটার এবং θ = কেন্দ্রস্থ কোণের রেডিয়ানসংখ্যা 1·9.

∴ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ = $\frac{6 \text{ মি. } 27 \text{ সে.মি.}}{1·9} = \frac{627 \text{ সে.মি.}}{1·9} = \frac{6270 \text{ সে.মি.}}{19}$ = 330 সে.মি.।

উদা. 3. একজন লোক কোন বৃত্তাকার পথে ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে দৌড়াইয়া 36 সেকেণ্ডে যে চাপ অতিক্রম করে, তাহা কেন্দ্রে 56° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তাকার পথটির ব্যাস নির্ণয় কর। $(\pi = \frac{22}{7})$ (C. U. 1946)

1 ঘণ্টা $= 60 \times 60$ সেকেণ্ড $= 3600$ সেকেণ্ড এবং 10 মাইল $= 17600$ গজ ;

$\therefore$ লোকটি 36 সেকেণ্ডে 176 গজ দীর্ঘ চাপ অতিক্রম করে এবং এই চাপের সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণ $= 56$ ডিগ্রী $= \frac{56\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \frac{56 \times 22}{180 \times 7}$ রেডিয়ান $= \frac{44}{45}$ রেডিয়ান ;

$\therefore$ বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ $=$ চাপ $\div$ কেন্দ্রস্থ কোণের রেডিয়ানসংখ্যা

$= 176$ গজ $\div \frac{44}{45} = 180$ গজ

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাস $= 180$ গজ $\times 2 = 360$ গজ।

উদা. 4. একটি চিহ্নযুক্ত বৃত্তের ব্যাস 6 ফুট এবং উহার কিনারার চিহ্নগুলি $15'$ ব্যবধানে অবস্থিত। পর পর দুইটি চিহ্নের দূরত্ব ইঞ্চিতে (আসন্ন দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত) নির্ণয় কর। $(\pi = \frac{22}{7})$ (H. S. 1962)

বৃত্তটির পরিধি $= 2 \times \frac{22}{7} \times 3$ ফুট $= \frac{132}{7}$ ফুট।

এখন, কেন্দ্রস্থ 360° কোণের সম্মুখস্থ পরিধি $= \frac{132}{7}$ ফুট ;

$\therefore$ কেন্দ্রস্থ $15'$ বা $\frac{1}{4}$ ডিগ্রী কোণের সম্মুখস্থ চাপ $= \frac{132}{7} \times \frac{1}{360} \times \frac{1}{4}$ ফুট

$= \frac{11}{840}$ ফুট $= \frac{11}{70}$ ইঞ্চি $= {\cdot}157\cdots$ ইঞ্চি $= {\cdot}16$ ইঞ্চি (আসন্ন)।

উদা. 5. পৃথিবীকে 7920 মাইল ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলক ধরিয়া পৃথিবীপৃষ্ঠে এমন একটি চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর, যাহা কেন্দ্রে $1'$ কোণ উৎপন্ন করিবে। $(\pi = \frac{22}{7})$ (C. U. 1948)

নির্ণেয় চাপ $= \theta r$, যেখানে $\theta =$ পৃথিবীর কেন্দ্রস্থ $1'$ কোণের রেডিয়ানসংখ্যা এবং $r =$ পৃথিবীর ব্যাসার্ধ। এখন,

$1' = \frac{1}{60}$ ডিগ্রী $= \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $= 7920$ মাইল $\div 2$ $= 3960$ মাইল।

$\therefore$ নির্ণেয় চাপ $= \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180} \times 3960$ মাইল

$= \frac{1}{60} \times \frac{22}{7 \times 180} \times 3960$ মাইল $= \frac{121}{105}$ মাইল $= 1\frac{16}{105}$ মাইল।

উদা. 6. যদি পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 4000 মাইল হয়, তবে এক নৌমাইলের দৈর্ঘ্য কত ? $(\pi = 3{\cdot}1416)$

দ্রাঘিমার যে চাপ পৃথিবীর কেন্দ্রে 1 মিনিট কোণ উৎপন্ন করে, তাহার দৈর্ঘ্য 1 নৌমাইল।

$\therefore$ 1 নৌমাইল $= 1'$ কোণের রেডিয়ানসংখ্যা $\times$ পৃথিবীর ব্যাসার্ধ

$= \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180} \times 4000$ মাইল $= \frac{3{\cdot}1416 \times 4000}{60 \times 180}$ মাইল

$= \frac{10{\cdot}472}{9}$ মাইল $= 1{\cdot}16$ মাইল (আসন্ন)।

উদা. 7. একটি ঘোড়া 27 ফুট ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পথে দৌড়াইয়া 3 সেকেণ্ডে যে চাপ অতিক্রম করে, তাহা কেন্দ্রে 70° কোণ উৎপন্ন করে। ঘোড়াটি অর্ধ-মিনিটে কত দূরত্ব অতিক্রম করে নির্ণয় কর। ($\pi=\frac{22}{7}$) (C. U. 1951)

3 সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত চাপ $=\theta r$, যেখানে $\theta=$ কেন্দ্রস্থ 70° কোণের রেডিয়ান-সংখ্যা এবং $r=27$ ফুট ;

$\therefore$ 3 সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত চাপ $=\frac{70}{180}\pi\times 27$ ফুট

$=\frac{70\times 22\times 27}{180\times 7}$ ফুট $=33$ ফুট

$\therefore$ ঘোড়াটি $\frac{1}{2}$ মিনিটে বা 30 সেকেণ্ডে 330 ফুট অতিক্রম করিবে।

উদা. 8. যদি r_1, r_2, r_3 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তত্রয়ের l_1, l_2, l_3 দীর্ঘ চাপ কেন্দ্রে যথাক্রমে a_1, a_2, a_3 বৃত্তীয় মানবিশিষ্ট তিনটি কোণ উৎপন্ন করে, তবে দেখাও যে, $\frac{1}{n}(a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3)$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের $(l_1+l_2+l_3)$ দীর্ঘ চাপ বৃত্তটির কেন্দ্রে n রেডিয়ানবিশিষ্ট কোণ উৎপন্ন করিবে। (C. U. 1940)

$\because$ চাপ = কেন্দ্রস্থ কোণের রেডিয়ানসংখ্যা $\times$ ব্যাসার্ধ,

$\therefore\ l_1=a_1r_1,\ l_2=a_2r_2,\ l_3=a_3r_3$

$\therefore$ যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\frac{1}{n}(a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3)$, তাহার $(l_1+l_2+l_3)$ দীর্ঘ চাপের সম্মুখস্থ কোণ

$$=\frac{l_1+l_2+l_3}{\frac{1}{n}(a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3)} \text{ রেডিয়ান}$$

$$=\frac{a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3}{\frac{1}{n}(a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3)} \text{ রেডিয়ান}$$

$=n$ রেডিয়ান।

উদা. 9. যে দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রে দুইটি সমান দীর্ঘ চাপ 60° ও 75° কোণ উৎপন্ন করে, তাহাদের ব্যাসার্ধের অনুপাত নির্ণয় কর। (S. F. 1953)

ব্যাসার্ধ দুইটি যেন যথাক্রমে r_1 ও r_2 এবং উভয় বৃত্তের চাপের দৈর্ঘ্য যেন l.

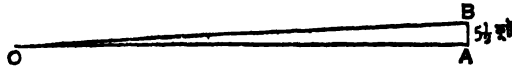
তাহা হইলে, $\frac{l}{r_1}=60^\circ$ এর রেডিয়ানসংখ্যা $=\frac{\pi}{3}$, $\therefore\ l=\frac{\pi r_1}{3}$

এবং $\frac{l}{r_2}=75^\circ$ এর রেডিয়ানসংখ্যা $=\frac{5\pi}{12}$, $\therefore\ l=\frac{5\pi r_2}{12}$

$\therefore\ \frac{\pi r_1}{3}=\frac{5\pi r_2}{12}$, $\therefore\ \frac{r_1}{r_2}=\frac{5\pi}{12}\times\frac{3}{\pi}=\frac{5}{4}$;

$\therefore\ r_1 : r_2=5 : 4.$

উদা. 10. $5\frac{1}{2}$ ফুট লম্বা একটি লোক কত দূরত্বে 20″ কোণ উৎপন্ন করে? ($\pi = \frac{22}{7}$)

B
$5\frac{1}{2}$ ফুট
O A

মনে কর, AB = $5\frac{1}{2}$ ফুট এবং উহা O বিন্দুতে 20″ কোণ উৎপন্ন করে। তাহা হইলে OA নির্ণেয় দূরত্ব হইবে।

AOB কোণটি অতিশয় ক্ষুদ্র বলিয়া OAর তুলনায় AB অতিশয় ক্ষুদ্র। সুতরাং AB কে OA ব্যাসার্ধবিশিষ্ট O কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি চাপ বলিয়া কার্যতঃ ধরা চলে।

$$\therefore \quad \frac{5\frac{1}{2} \text{ ফুট}}{OA} = 20'' \text{ এর রেডিয়ানসংখ্যা} = \frac{20 \times \pi}{60 \times 60 \times 180}$$

$$\therefore \quad OA = 5\frac{1}{2} \times \frac{60 \times 60 \times 180}{20 \times \pi} \text{ ফুট} = \frac{11 \times 60 \times 60 \times 180 \times 7}{2 \times 20 \times 22} \text{ ফুট}$$

$$= 18900 \text{ গজ} = 10 \text{ মাইল } 1300 \text{ গজ।}$$

প্রশ্নমালা 4

(অপর কিছুর উল্লেখ না থাকিলে $\pi = \frac{22}{7}$ ধরিবে।)

1. 7 মিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের 11 মিটার দীর্ঘ চাপ কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহার ডিগ্রীসংখ্যা নির্ণয় কর।

2. 10 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের 6 সেন্টিমিটার দীর্ঘ একটি চাপ কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহার পরিমাণ ডিগ্রী ও মিনিটে নির্ণয় কর।

3. কোন বৃত্তের $8\frac{1}{2}$ মিটার দীর্ঘ একটি চাপ কেন্দ্রে 1·7 রেডিয়ানবিশিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

4. কোন বৃত্তের 2618 মিটার দীর্ঘ একটি চাপ কেন্দ্রে 60° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত?

5. 70 মিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের চাপ কেন্দ্রে 54° কোণ উৎপন্ন করে। চাপটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

6. 4000 কিলোমিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি চাপ উহার কেন্দ্রে 5″ কোণ উৎপন্ন করে। চাপটির দৈর্ঘ্য কিলোমিটারে নির্ণয় কর। (C. U. 1877)

7. পৃথিবীর বিষুবরেখার ব্যাসার্ধ 4000 মাইল এবং $\pi = 3{\cdot}14159$ ধরিয়া বিষুবরেখার যে চাপ পৃথিবীর কেন্দ্রে 1 মিনিট কোণ উৎপন্ন করে, তাহার দৈর্ঘ্য আসন্ন ফুটে নির্ণয় কর। (G. U. 1950)

8. একটি ঘোড়া কোন বৃত্তাকার পথে ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে দৌড়াইয়া 30 সেকেণ্ডে যে চাপ অতিক্রম করে, তাহা কেন্দ্রে 72° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তাকার পথটির ব্যাস নির্ণয় কর।

9. একজন লোক 120 ফুট ব্যাসবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পথে দৌড়াইয়া 5 সেকেণ্ডে যে চাপ অতিক্রম করে, তাহা কেন্দ্রে 42° কোণ উৎপন্ন করে। লোকটি অর্ধ-মিনিটে কত গজ দৌড়াইতে পারে নির্ণয় কর।

10. যদি r_1, r_2 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের l_1, l_2 দীর্ঘ চাপদ্বয় কেন্দ্রে যথাক্রমে a_1, a_2 বৃত্তীয় মানবিশিষ্ট দুইটি কোণ উৎপন্ন করে, তবে দেখাও যে, $\frac{1}{n}(a_1r_1+a_2r_2)$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের l_1+l_2 দীর্ঘ চাপ বৃত্তটির কেন্দ্রে n রেডিয়ানবিশিষ্ট কোণ উৎপন্ন করিবে।

11. যে দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রে দুইটি সমান দীর্ঘ চাপ 72° ও 54° কোণ উৎপন্ন করে, তাহাদের ব্যাসার্ধের অনুপাত নির্ণয় কর।

12. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 4000 মাইল ধরিয়া এমন দুইটি স্থানের দ্রাঘিমার অন্তর নির্ণয় কর, যাহাদের একটি অপরটির 110 মাইল দক্ষিণে অবস্থিত।

13. 33 মিটার উচ্চ একটি মন্দির কত দূরত্বে 12″ কোণ উৎপন্ন করে ?

14. $5\frac{1}{2}$ ফুট লম্বা একটি লোককে অর্ধ-মাইল দূর হইতে দেখা গেল। লোকটি কত পরিমাণের সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে ?

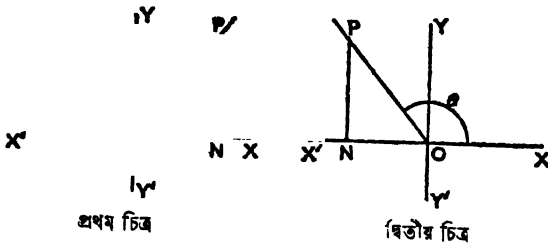
15. $3\frac{1}{2}$ মাইল দূরে অবস্থিত একটি স্তম্ভ 5′ কোণ উৎপন্ন করে। স্তম্ভটির উচ্চতা কত ?

16. পৃথিবী হইতে সূর্যের গড় দূরত্ব 92500000 মাইল এবং সূর্য পৃথিবীতে 32′ কোণ উৎপন্ন করে। সূর্যের ব্যাস মাইলে নির্ণয় কর।

কোণানুপাত

15. মনে কর, XOX′ ও YOY′ সরলরেখা দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে।

প্রথম চিত্র

দ্বিতীয় চিত্র

OP সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া XOP কোণ বা θ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। OPর যে কোন বিন্দু P হইতে OX বা বর্ধিত OX এর উপর PN লম্ব টান। তাহা হইলে PON একটি সমকোণী ত্রিভুজ হইল, যাহার PN লম্ব, OP অতিভুজ এবং ON ভূমি। তাহা হইলে,

θ কোণের sine (সাইন) বা সংক্ষেপে $\sin\theta=\frac{PN}{OP}$ অর্থাৎ লম্ব

θ কোণের cosine (কোসাইন) বা সংক্ষেপে $\cos\theta=\frac{ON}{OP}$ অর্থাৎ $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$

θ কোণের tangent (ট্যানজেণ্ট) বা সংক্ষেপে $\tan\theta=\frac{PN}{ON}$ অর্থাৎ $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$

θ কোণের cotangent (কোট্যানজেণ্ট) বা $\cot\theta=\frac{ON}{PN}$ অর্থাৎ $\frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$

θ কোণের secant (সেকাণ্ট) বা $\sec\theta=\frac{OP}{ON}$ অর্থাৎ $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$

θ কোণের cosecant (কোসেকাণ্ট) বা $\operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{PN}$ অর্থাৎ $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$

ইহাদিগকে θ কোণের **কোণানুপাত** (Trigonometrical ratios) বলে।

sin, cos, tan, cot, sec এবং cosec 'কে যথাক্রমে সাইন, কস, ট্যান, কট, সেক এবং কোসেক পড়া হয়। লক্ষ্য কর, sin ও cosec, cos ও sec এবং tan ও cot পরস্পরের অন্যোন্যক।

এই ছয়টি অনুপাত ব্যতীত $1-\cos\theta$ কে ভার্চ θ (vers θ) এবং $1-\sin\theta$ কে কোভার্চ θ (covers θ) বলে।

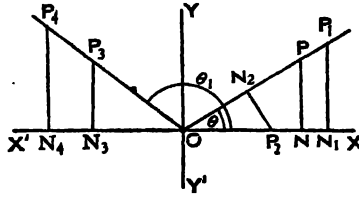
উহারা সকলেই অনুপাত বলিয়া প্রত্যেকে এক একটি সংখ্যা। শেষোক্ত অনুপাত দুইটি কদাচিৎ ব্যবহৃত হয়।

16. কোণানুপাতসমূহের চিহ্ন।

অনুচ্ছেদ 15 এর চিত্রে পরস্পর লম্ব XOX' এবং YOY' সরলরেখাদ্বয় কাগজের সমতলকে XOY, YOX', X'OY' এবং Y'OX এই চারি অংশে বিভক্ত করিয়াছে। ইহাদিগকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ **পাদ** (Quadrant) বলে।

লেখচিত্রের ন্যায় OX ও OY এর দিক বরাবর যে কোন দূরত্বকে ধনাত্মক এবং OX' ও OY' এর দিক বরাবর যে কোন দূরত্বকে ঋণাত্মক ধরা হয়। ঘূর্ণ্যমান OP সরলরেখা যে কোনও পাদেই অবস্থিত থাকুক না কেন, OP বরাবর যে কোন দূরত্বকে ধনাত্মক ধরা হয়।

কাজেই পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের প্রথম চিত্রের ন্যায় OP যদি প্রথম পাদে অবস্থিত থাকে, তবে OPN সমকোণী ত্রিভুজটির OP, PN এবং ON ধনাত্মক হইবে বলিয়া প্রথম ছয়টি কোণানুপাতই ধনাত্মক হইবে। দ্বিতীয় চিত্রের ন্যায় OP যদি দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত থাকে, তবে OP ও PN ধনাত্মক এবং ON ঋণাত্মক হইবে। কাজেই sine এবং উহার অন্যোন্যক cosecant ধনাত্মক হইবে এবং অপর চারিটি কোণানুপাত ঋণাত্মক হইবে।

17. একই কোণের কোণানুপাতসমূহ সর্বদা একই থাকিবে।

(1) মনে কর, প্রথম পাদে অবস্থিত OP যে কোনও একটি সূক্ষ্মকোণ XOP $(=\theta)$ উৎপন্ন করিয়াছে। OPর উপর অবস্থিত যে কোনও দুইটি বিন্দু P ও P_1 হইতে OX এর উপর PN ও P_1N_1 লম্ব টান। OX এর উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু P_2 হইতে OPর উপর P_2N_2 লম্ব টান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে PON, P_1ON_1 এবং P_2ON_2 ত্রিভুজত্রয় হইতে θ কোণের একই কোণানুপাতসমূহ পাওয়া যাইবে।

প্রমাণ। PON, P_1ON_1 এবং P_2ON_2 ত্রিভুজত্রয়ের

$\angle N = \angle N_1 = \angle N_2$ ($\because$ প্রত্যেকে সমকোণ) এবং $\angle \theta$ সাধারণ ;

$\therefore$ ত্রিভুজত্রয় সদৃশকোণী, কাজেই সদৃশ।

$\therefore$ উহাদের বাহুগুলি সমানুপাতী, এবং উহারা সকলেই ধনাত্মক ;

$\therefore$ যে কোনও সূক্ষ্মকোণ θ এর কোণানুপাতসমূহ সর্বদা একই থাকিবে।

(2) আবার মনে কর, দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত OP_3 যে কোনও একটি স্থূলকোণ XOP_3 $(=\theta_1)$ উৎপন্ন করিয়াছে। OP_3র উপর অবস্থিত যে কোনও দুইটি বিন্দু P_3 ও P_4 হইতে OX' এর উপর P_3N_3 ও P_4N_4 লম্ব টান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে P_3ON_3 এবং P_4ON_4 ত্রিভুজদ্বয় হইতে θ_1 কোণের একই কোণানুপাতসমূহ পাওয়া যাইবে।

প্রমাণ। P_3ON_3 এবং P_4ON_4 ত্রিভুজদ্বয়ের

$\angle N_3 = \angle N_4$ ($\because$ প্রত্যেকে সমকোণ) এবং $\angle O$ সাধারণ ;

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, কাজেই সদৃশ।

$\therefore$ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী, এবং উহাদের অনুরূপ বাহু OP_3 ও OP_4 এবং P_3N_3 ও P_4N_4 ধনাত্মক, এবং অনুরূপ বাহু ON_3 ও ON_4 ঋণাত্মক ;

$\therefore$ যে কোনও স্থূলকোণ θ_1 এর কোণানুপাতসমূহ সর্বদা একই থাকিবে।

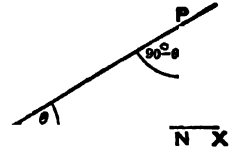
এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, একটি কোণের পরিমাণ যাহাই হউক না কেন, কোণানুপাতসমূহ সর্বদা একই থাকিবে।

18. দুইটি পূরক কোণের কোণানুপাতসমূহের পরস্পর সম্বন্ধ।

মনে কর, OP সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া $\angle XOP = \theta$ উৎপন্ন করিয়াছে। ঘূর্ণ্যমান রেখার যে কোন বিন্দু P হইতে OX এর উপর PN লম্ব টান।

NOP ত্রিভুজের $\angle N = 1$ সমকোণ ; সুতরাং ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ বলিয়া, $\angle NOP + \angle NPO = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ উহারা পূরক কোণ, এবং $\angle NPO = 1$ সমকোণ $- \angle NOP = 90° - \theta$.

এখন $\angle NPO$ সম্পর্কে PN ভূমি এবং ON লম্ব ;

$$\therefore \sin(90° - \theta) = \frac{ON}{PO} = \cos\theta, \; \cos(90° - \theta) = \frac{PN}{PO} = \sin\theta,$$

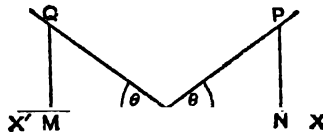
$$\tan(90° - \theta) = \frac{ON}{PN} = \cot\theta, \; \cot(90° - \theta) = \frac{PN}{ON} = \tan\theta,$$

$$\sec(90° - \theta) = \frac{PO}{PN} = \operatorname{cosec}\theta \text{ এবং } \operatorname{cosec}(90° - \theta) = \frac{PO}{ON} = \sec\theta.$$

$\therefore$ যে কোন কোণের sine = উহার পূরক কোণের cosine,
যে কোন কোণের tangent = উহার পূরক কোণের cotangent
এবং যে কোন কোণের secant = উহার পূরক কোণের cosecant.

এইজন্যই sine, tangent ও secant এর নাম হইতে যথাক্রমে cosine, cotangent ও cosecant এর নামকরণ হইয়াছে।

19. দুইটি সম্পূরক কোণের কোণানুপাতসমূহের পরস্পর সম্বন্ধ।

মনে কর, OP সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া $\angle XOP = \theta$ উৎপন্ন করিয়াছে এবং OQ সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে

ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া 180° পরিমিত $\angle XOX'$ উৎপন্ন করিবার পর বিপরীতক্রমে ঘুরিয়া $\angle X'OQ = \theta$ উৎপন্ন করিয়াছে। $\therefore \angle XOQ = 180° - \theta$.

OPর সমান করিয়া OQ লও। OX এবং OX' এর উপর যথাক্রমে PN এবং OM লম্ব টান। তাহা হইলে OPN এবং OQM ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle N = \angle M$, $\angle PON = \angle QOM$ এবং $OP = OQ$; $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$$\therefore QM = PN, \; OM = -ON, \; OQ = OP,$$

$$\therefore \sin(180° - \theta) = \sin XOQ = \frac{QM}{OQ} = \frac{PN}{OP} = \sin\theta,$$

$$\cos(180° - \theta) = \cos XOQ = \frac{OM}{OQ} = \frac{-ON}{OP} = -\cos\theta,$$

$$\tan(180^\circ-\theta)=\tan XOQ=\frac{QM}{OM}=\frac{PN}{-ON}=-\tan\theta.$$

$\therefore$ উহাদের অন্যোন্যকগুলি লইয়া, $\cot(180^\circ-\theta)=-\cot\theta$,
$\sec(180^\circ-\theta)=-\sec\theta$, $\operatorname{cosec}(180^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$.

মন্তব্য। দুইটি সম্পূরক কোণের sine সমান, এবং উহাদের cosine ও tangent এর সাংখ্যমান সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত। ইহা হইতে দুইটি সম্পূরক কোণের অন্যান্য কোণানুপাতগুলির সম্বন্ধ নির্ণয় করা চলে।

20. কোণানুপাতগুলি সবই সংখ্যা। সুতরাং বীজগণিতীয় প্রক্রিয়াসূচক চিহ্নসমূহ একই অর্থে ত্রিকোণমিতিতে ব্যবহৃত হইয়া থাকে। যেমন, $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ এর যোগফল $=\sin\theta+\cos\theta$, অন্তর $=\sin\theta-\cos\theta$, গুণফল $=\sin\theta\times\cos\theta$ বা $\sin\theta\cos\theta$ এবং ভাগফল $=\sin\theta\div\cos\theta$ বা $\sin\theta/\cos\theta$.

$\sin\theta=\theta$ কোণের sine ; সুতরাং $\sin\theta=\sin\times\theta$ বা $\theta\times\sin$ নহে। তদ্রূপ, $\sin\theta\times2=2\sin\theta$ এবং $\sin\theta\times\sin\theta=(\sin\theta)^2$ বা $\sin^2\theta$, $\sin\theta^2$ নহে।

$\cos2\theta=2\theta$ কোণের cosine ; সুতরাং $\cos2\theta=2\cos\theta$ নহে, কারণ $2\cos\theta=2\times\cos\theta$, অর্থাৎ $\cos\theta$ এর 2 গুণ।

21. **কোণানুপাতসমূহের পরস্পর সম্বন্ধ।**

মনে কর, OP সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া XOP কোণ বা θ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। ঘূর্ণ্যমান রেখার যে কোন বিন্দু P হইতে OX এর উপর PN লম্ব টান।

তাহা হইলে,

(1) $\sin\theta=\frac{PN}{OP}=1\Big/\frac{OP}{PN}=\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$, $\operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{PN}=1\Big/\frac{PN}{OP}=\frac{1}{\sin\theta}$

এবং $\sin\theta\times\operatorname{cosec}\theta=\frac{PN}{OP}\times\frac{OP}{PN}=1.$

অনুরূপে, $\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}$, $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ এবং $\cos\theta\times\sec\theta=1.$

$\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$, $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$ এবং $\tan\theta\times\cot\theta=1.$

(2) $\tan\theta=\frac{PN}{ON}=\frac{PN}{OP}\Big/\frac{ON}{OP}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

এবং $\cot\theta=\frac{ON}{PN}=\frac{ON}{OP}\Big/\frac{PN}{OP}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(3) $\because$ PON সমকোণী ত্রিভুজের $\angle N$ সমকোণ,

$\therefore$ $PN^2+ON^2=OP^2$, $\therefore$ $\left(\frac{PN}{OP}\right)^2+\left(\frac{ON}{OP}\right)^2=\left(\frac{OP}{OP}\right)^2.$

$\therefore$ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$

আবার, $PN^2+ON^2=OP^2$, $\therefore \left(\frac{PN}{ON}\right)^2+\left(\frac{ON}{ON}\right)^2=\left(\frac{OP}{ON}\right)^2$

$\therefore \tan^2\theta+1=\sec^2\theta$, $\therefore$ ($\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$.)

আবার, $PN^2+ON^2=OP^2$, $\therefore \left(\frac{PN}{PN}\right)^2+\left(\frac{ON}{PN}\right)^2=\left(\frac{OP}{PN}\right)^2$

$\therefore 1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$, $\therefore$ ($\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$.)

এই সূত্রত্রয়কে বিভিন্ন আকারে ব্যবহার করা যাইতে পারে। যেমন,

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)$$
$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$$
$$\tan^2\theta=\sec^2\theta-1=(\sec\theta+1)(\sec\theta-1)$$
$$\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta-1=(\operatorname{cosec}\theta+1)(\operatorname{cosec}\theta-1),$$ ইত্যাদি।

মন্তব্য। θ এর যে কোন মানের জন্য উল্লিখিত সমুদয় সূত্রগুলি খাটিবে। যেমন,
$\sec^2 30^\circ=1+\tan^2 30^\circ$, $\tan\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\theta}{2}\Big/\cos\frac{\theta}{2}$, $\sin^2\frac{\theta}{3}+\cos^2\frac{\theta}{3}=1$.

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $\cos^4\theta-\sin^4\theta+1=2\cos^2\theta$.

$$\begin{aligned}\cos^4\theta-\sin^4\theta+1&=(\cos^2\theta)^2-(\sin^2\theta)^2+1\\&=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+1\\&=1\times(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+1\\&=\cos^2\theta-\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta\\&=2\cos^2\theta.\end{aligned}$$

উদা. 2. দেখাও যে, $(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)=\sin^3\theta-\cos^3\theta$.

বাম পক্ষ $=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)=\sin^3\theta-\cos^3\theta$.

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, $\cos A+\tan A\sin A=\sec A$. (C. U. 1950)

বাম পক্ষ $=\cos A+\frac{\sin A}{\cos A}\times\sin A=\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos A}=\frac{1}{\cos A}=\sec A$.

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{\sin A\cos A}=\tan A+\cot A$. (E.B.S.B. 1948)

বাম পক্ষ $=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}=\frac{\sin^2 A}{\sin A\cos A}+\frac{\cos^2 A}{\sin A\cos A}$

$=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}=\tan A+\cot A$.

উদা. 5. দেখাও যে, $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$.

বাম পক্ষ $=\frac{\sin^2\theta+1+\cos^2\theta+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$

$=\frac{2}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$.

উদা. 6. দেখাও যে, $\sqrt{\sec^2 A - 1} = \sin A \sec A$.

বাম পক্ষ $= \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \sin A \sec A$.

উদা. 7. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$. (C. U. 1943)

$$\text{বাম পক্ষ} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta.$$

উদা. 8. দেখাও যে, $1 + \dfrac{\tan^2 A}{\sec A + 1} = \sec A$.

$$\text{বাম পক্ষ} = 1 + \frac{\sec^2 A - 1}{\sec A + 1} = 1 + \sec A - 1 = \sec A.$$

উদা. 9. দেখাও যে, $\sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta = (\tan\theta + \cot\theta)^2$.

$$\text{বাম পক্ষ} = (1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta) = 1 + \tan^2\theta + \cot^2\theta + \tan^2\theta \cot^2\theta$$

$$= 1 + \tan^2\theta + \cot^2\theta + 1 = \tan^2\theta + \cot^2\theta + 2$$

$$= \tan^2\theta + \cot^2\theta + 2\tan\theta\cot\theta = (\tan\theta + \cot\theta)^2.$$

উদা. 10. দেখাও যে, $(\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$. (C. U. 1951)

$$\text{বাম পক্ষ} = \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta \sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta \sin\theta} = 1.$$

উদা. 11. দেখাও যে, $\cos^2 A - \sin^2 A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$. (G. U. 1950)

$$\text{বাম পক্ষ} = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{1} = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A\left(1 - \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)}{\cos^2 A\left(1 + \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)} = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$$

উদা. 12. দেখাও যে, $\dfrac{\sec A}{\sec A - 1} + \dfrac{\sec A}{\sec A + 1} = 2\operatorname{cosec}^2 A$.

$$\text{বাম পক্ষ} = \frac{\sec A(\sec A + 1 + \sec A - 1)}{\sec^2 A - 1} = \frac{2\sec^2 A}{\tan^2 A}$$

$$= \frac{2}{\cos^2 A} \times \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{2}{\sin^2 A} = 2\operatorname{cosec}^2 A.$$

উদা. 13. দেখাও যে, $\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}=\sin\theta+\cos\theta.$

বাম পক্ষ$=\dfrac{\sin\theta}{1-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\dfrac{\cos\theta}{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$$\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\sin\theta+\cos\theta.$$

উদা. 14. দেখাও যে, $\dfrac{1}{\sec\theta+\tan\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

(C. U. 1944 ; G. U. 1951)

$$\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}+\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}=\frac{\sec\theta-\tan\theta+\sec\theta+\tan\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2\sec\theta}{1}=\sec\theta+\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}.$$

পক্ষান্তর করিয়া, $\dfrac{1}{\sec\theta+\tan\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

উদা. 15. দেখাও যে, $\dfrac{\sec\theta-\tan\theta+1}{\sec\theta+\tan\theta+1}=\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}.$

বাম পক্ষ$=\dfrac{\sec\theta-\tan\theta+\sec^2\theta-\tan^2\theta}{\sec\theta+\tan\theta+1}$ $(\because \sec^2\theta=1+\tan^2\theta)$

$$=\frac{(\sec\theta-\tan\theta)+(\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)}{\sec\theta+\tan\theta+1}$$

$$=\frac{(\sec\theta-\tan\theta)(1+\sec\theta+\tan\theta)}{\sec\theta+\tan\theta+1}=\sec\theta-\tan\theta$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}.$$

উদা. 16. দেখাও যে, $\dfrac{\tan A\sin A}{\tan A+\sin A}=\dfrac{\tan A-\sin A}{\tan A\sin A}$

বাম পক্ষ $\dfrac{\tan^2A\sin^2A}{(\tan A+\sin A)(\tan A\sin A)}=\dfrac{\tan^2A\,(1-\cos^2A)}{(\tan A+\sin A)\tan A\sin A}$

$$=\frac{\tan^2A-\sin^2A}{(\tan A+\sin A)\tan A\sin A}=\frac{\tan A-\sin A}{\tan A\sin A}.$$

উদা. 17. সরল কর : $\dfrac{1}{1+\cos^2A}+\dfrac{1}{1+\sec^2A}.$

প্রদত্ত রাশি$=\dfrac{1}{1+\cos^2A}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\cos^2A}}=\dfrac{1}{1+\cos^2A}+\dfrac{\cos^2A}{1+\cos^2A}=1.$

উদা. 18. সরল কর : $\cos^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B + \cos^2 A \sin^2 B + \cos^2 B \sin^2 A$. (C. U. 1943)

প্রদত্ত রাশি $= \cos^2 A(\cos^2 B + \sin^2 B) + \sin^2 A(\sin^2 B + \cos^2 B)$
$= (\cos^2 B + \sin^2 B)(\cos^2 A + \sin^2 A) = 1 \times 1 = 1.$

উদা. 19. সরল কর : $\dfrac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} + \dfrac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B}$. (C. U. 1942, '44)

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B + \cos^2 A - \cos^2 B}{(\cos A + \cos B)(\sin A + \sin B)}$
$= \dfrac{(\sin^2 A + \cos^2 A) - (\sin^2 B + \cos^2 B)}{(\cos A + \cos B)(\sin A + \sin B)}$
$= \dfrac{1-1}{(\cos A + \cos B)(\sin A + \sin B)} = 0.$

উদা. 20. সরল কর : $\dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{\sec\alpha + \sec\beta} + \dfrac{\sec\alpha - \sec\beta}{\tan\beta + \tan\alpha}$.

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{\tan^2\beta - \tan^2\alpha + \sec^2\alpha - \sec^2\beta}{(\sec\alpha + \sec\beta)(\tan\beta + \tan\alpha)}$
$= \dfrac{\tan^2\beta - \tan^2\alpha + 1 + \tan^2\alpha - 1 - \tan^2\beta}{(\sec\alpha + \sec\beta)(\tan\beta + \tan\alpha)}$
$= \dfrac{0}{(\sec\alpha + \sec\beta)(\tan\beta + \tan\alpha)} = 0.$

প্রশ্নমালা 5

প্রমাণ কর :

1. $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$. (E. B. S. B. 1950)
2. $(\sin A + \cos A)(1 - \sin A\cos A) = \sin^3 A + \cos^3 A$.
3. $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$.
4. $\sin A + \cot A \cos A = \operatorname{cosec} A$.
5. $\sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A = \tan^2 A + \cot^2 A + 2$. (C. U. 1940)
6. $\sin^2\theta(1 + \cot^2\theta) + \cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 2$. (C. U. 1951)
7. $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$.
8. $\operatorname{cosec}^4\theta - \operatorname{cosec}^2\theta = \cot^4\theta + \cot^2\theta$.
9. $\dfrac{1}{\tan A + \cot A} = \sin A \cos A$. (C. U. 1946)
10. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sec\theta + \tan\theta$. 11. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$.
12. $\sqrt{\dfrac{\operatorname{cosec}\theta + 1}{\operatorname{cosec}\theta - 1}} = \sec\theta + \tan\theta$. 13. $\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta + \cot\theta} = \sin\theta$.

14. $1-\dfrac{\cos^2 A}{1+\sin A}=\sin A.$ 15. $1+\dfrac{\cot^2 A}{1+\operatorname{cosec} A}=\operatorname{cosec} A.$

16. $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta.$ (G. U. 1952)

17. $\dfrac{\sec^4\theta-2\sec^2\theta\tan^2\theta+\tan^4\theta}{\operatorname{cosec}^4\theta-2\operatorname{cosec}^2\theta\cot^2\theta+\cot^4\theta}=1.$ (C. U. 1942)

18. $\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A-1}+\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A+1}=2\sec^2 A.$ (S. F. 1953)

19. $\dfrac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}=\dfrac{1-\cot\theta}{1+\cot\theta}.$ 20. $\tan^2 A-\tan^2 B=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A.\cos^2 B}$ (C. U. 1936)

21. $\dfrac{1+\cot^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cot^2\theta.$ 22. $\dfrac{\tan A+\cot B}{\tan B+\cot A}=\tan A\cot B.$

23. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta}.$

24. $\dfrac{1+\tan\theta+\sec\theta}{1-\tan\theta+\sec\theta}=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}.$ 25. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta}=\left(\dfrac{1-\tan\theta}{1-\cot\theta}\right)^2$

[প্রত্যেক পক্ষ $=\tan^2\theta$ দেখাও।] (S. F. 1956)

সরল কর :

26. $\dfrac{1}{1+\sin^2 A}+\dfrac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 A}.$ 27. $(1+\tan^2 A)(1-\sin^2 A)$

28. $\cos^2 B\operatorname{cosec}^2 A-\sin^2 B\cot^2 A-\cos^2 B\cot^2 A+\sin^2 B\operatorname{cosec}^2 A.$ (C. U. 1945)

29. $(\sin\theta-\operatorname{cosec}\theta)(\cos\theta-\sec\theta)(\tan\theta+\cot\theta).$

30. $\dfrac{\sec^4 A-2\sec^2 A\tan^2 A+\tan^4 A}{\sin^4 A+2\sin^2 A\cos^2 A+\cos^4 A}.$ (G. U. 1949)

31. $\dfrac{\sec^4 A-2\sec^2 A\tan^2 A+\tan^4 A-1}{\operatorname{cosec}^4 A-2\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A+\cot^4 A}.$ (C. U. 1941)

32. $\dfrac{\operatorname{cosec} A-\operatorname{cosec} B}{\cot B+\cot A}+\dfrac{\cot B-\cot A}{\operatorname{cosec} A+\operatorname{cosec} B}.$

22. কোণানুপাতসমূহের মানের সীমা।

$\sin^2\theta$ এবং $\cos^2\theta$ এর প্রত্যেকে বর্গরাশি বলিয়া প্রত্যেক ধনরাশি। সুতরাং $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ বলিয়া, $\sin^2\theta$ এবং $\cos^2\theta$ এর কোনটিই 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না। কাজেই θ এর মান যাহাই হউক না কেন, উহাদের বর্গমূল অর্থাৎ θ এবং $\cos\theta$ এর মানের সীমা $+1$ এবং -1 হইবে।

আবার, sec θ এবং cosec θ যথাক্রমে $1/\cos\theta$ এবং $1/\sin\theta$ বলিয়া উহাদের সাংখ্যমান (Numerical values) 1 অপেক্ষা ছোট হইতে পারে না কিন্তু θ এর মানানুসারে tan θ এবং cot θ এর মান 1 অপেক্ষা ছোট বা বড় হইতে পারে।

23. যে কোন কোণের অনুপাতগুলিকে উহাদের যে কোন একটি নির্দিষ্ট কোণানুপাত দ্বারা প্রকাশ করা যায়। প্রথমে ঐ কোণের sine ও cosine কে ঐ নির্দিষ্ট কোণানুপাত দ্বারা প্রকাশ কর। তৎপর উহাদের সাহায্যে tangent কে প্রকাশ কর। তৎপর উহাদের অন্যোন্যকগুলি লইয়া cotangent, secant ও cosecant কে প্রকাশ কর। চিত্রের সাহায্যে অতি সহজে প্রকাশ করা যায়। উদাহরণ দেওয়া গেল।

উদা. 1. সমুদয় কোণানুপাতকে sine দ্বারা প্রকাশ কর।

প্রথম প্রণালী :

$$\sin\theta=\sin\theta,\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}\quad(\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$$

এবং $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$;

$$\therefore\ \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta},$$

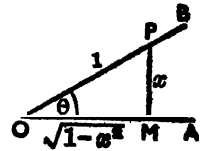
$$\sec\theta=\frac{1}{\ }=\frac{1}{\ },\ \text{cosec}\ \frac{1}{\sin}$$

দ্বিতীয় প্রণালী : মনে কর, AOB কোণটি θ, OB বাহুর যে কোন বিন্দু P হইতে OA র উপর PM লম্ব, OP $=1$ একক এবং PM $=x$ একক।

তাহা হইলে, $OM=\sqrt{OP^2-PM^2}=\sqrt{1-x^2}$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{PM}{OP}=\frac{x}{1}=x,$$

$$\cos\theta=\frac{OM}{OP}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1}=\sqrt{1-\sin^2\theta},$$

$$\tan\theta=\frac{PM}{OM}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$ ইত্যাদি।

দ্রষ্টব্য। যে কোণানুপাত দ্বারা অপর কোণানুপাতগুলিকে প্রকাশ করিতে হইবে, সেই কোণানুপাতের মান যাহাতে x হয় এমনভাবে ত্রিভুজটির সংশ্লিষ্ট বাহুদ্বয়ের মান লইবে। যেমন, $\sin\theta=PM/OP$ বলিয়া PM কে x একক এবং OP কে 1 একক লওয়ায় sin θ এর মান x হইয়াছে।

উদা. 2. সমুদয় কোণানুপাতকে cotangent দ্বারা প্রকাশ কর।

প্রথম প্রণালী :

$$\sin\theta=\frac{1}{\text{cosec}\,\theta}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}},\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$\therefore \sqrt{1-\frac{}{1+\cot^2\theta}}=\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$$

$$\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta},\ \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta},$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\sqrt{1+\cot^2\theta}.$$

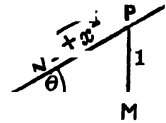
দ্বিতীয় প্রণালী : মনে কর, AOB কোণটি θ, OB বাহুর যে কোন বিন্দু P হইতে OA র উপর PM লম্ব, OM $=x$ একক এবং PM $=1$ একক।

তাহা হইলে, OP $=\sqrt{\text{PM}^2+\text{OM}^2}=\sqrt{1+x^2}$

$$\cot\theta=\frac{\text{OM}}{\text{PM}}=\frac{x}{1}=x,$$

$$\sin\theta=\frac{\text{PM}}{\text{OP}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}},$$

$$\cos\theta=\frac{\text{OM}}{\text{OP}}=\frac{}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$$

$$\tan\theta=\frac{\text{PM}}{\text{OM}}=\frac{1}{x}=\frac{1}{\cot\theta},$$ ইত্যাদি।

উদা. 3. সমুদয় কোণানুপাতকে secant দ্বারা প্রকাশ কর।

প্রথম প্রণালী : $\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}$ এবং $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{\sec^2\theta}}=\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}.$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{\sec^2\theta-1},\ \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta},$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{}{\sin\theta}=\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}.$$

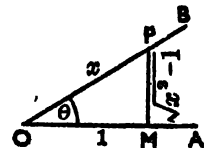
দ্বিতীয় প্রণালী : মনে কর, AOB কোণটি θ, OB বাহুর যে কোন বিন্দু P হইতে OA র উপর PM লম্ব, OP $=x$ একক এবং OM $=1$ একক।

তাহা হইলে, PM $=\sqrt{\text{OP}^2-\text{OM}^2}=\sqrt{x^2-1}.$

$$\sec\theta=\frac{\text{OP}}{\text{OM}}=\frac{x}{1}=x.$$

$$\sin\theta=\frac{\text{PM}}{\text{OP}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta},$$

$$\cos\theta=\frac{\text{OM}}{\text{OP}}=\frac{1}{x}=\frac{1}{\sec\theta},\ \tan\theta=\frac{\text{PM}}{\text{OM}}$$

$$=\sqrt{x^2-}=\sqrt{\sec^2\theta-1},$$ ইত্যাদি।

৫৭. কোন কোণাহুপাতের মান দেওয়া থাকিলে অপর কোণাহুপাতের মানগুলি নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. $\sin\theta = \frac{2}{3}$ হইলে, $\cos\theta$ এবং $\cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

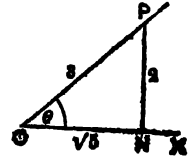
প্রথম প্রণালী : $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\text{এবং } \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{5}}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

দ্বিতীয় প্রণালী : মনে কর, $\angle XOP = \angle\theta$ এবং OX এর উপর PN লম্ব। মনে কর, $PN = 2$ এবং $OP = 3$;

তাহা হইলে, $\sin\theta = \frac{2}{3}$ হইল। এখন,

$$ON = \sqrt{OP^2 - PN^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}.$$

$\therefore \quad \cos\theta = \frac{ON}{OP} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ এবং $\cot\theta = \frac{ON}{PN} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

উদা. 2. যদি একটি সূক্ষ্মকোণের tangent c হয়, তবে দেখাও যে,

$$\text{sine} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}. \qquad \text{(C. U. 1941)}$$

উদা. 1 এর চিত্রে মনে কর, প্রদত্ত সূক্ষ্মকোণটি $=\theta$, $PN = c$ এবং $ON = 1$.

তাহা হইলে, $\tan\theta = \frac{PN}{ON} = \frac{c}{1} = c$ হইল। এখন,

$$OP = \sqrt{ON^2 + PN^2} = \sqrt{1+c^2}$$

$$\therefore \text{ কোণটির sine} = \sin\theta = \frac{PN}{OP} = \frac{\;}{\sqrt{1+c^2}}$$

প্রশ্নমালা 6

1. $\cos\theta$ কে $\tan\theta$ দ্বারা প্রকাশ কর।
2. $\text{cosec}\,\theta$ কে $\cos\theta$ দ্বারা প্রকাশ কর।
3. $\sec\theta$ কে $\cot\theta$ দ্বারা প্রকাশ কর।
4. $\sin\theta = \frac{1}{3}$ হইলে, $\cot\theta$ ও $\sec\theta$ এর মান কত ?
5. $\cos x = \frac{2}{3}$ হইলে, $\tan x$, $\sec x$ ও $\text{cosec}\, x$ এর মান কত ?
6. $\text{cosec}\,\theta = \frac{5}{3}$ হইলে দেখাও যে, $\sec\theta = \frac{5}{4}$.
7. $\tan\theta = \sqrt{3}$ হইলে, $\cos\theta$ ও $\text{cosec}\,\theta$ এর মান কত ?
8. $\cos\theta = \frac{4}{5}$ হইলে দেখাও যে, $\tan\theta = \frac{3}{4}$.
9. একটি কোণের tangent $= \frac{4}{3}$; অপর কোণাহুপাতগুলি নির্ণয় কর।
10. একটি সূক্ষ্মকোণের sine $= x$. দেখাও যে, উহার cosine $= \sqrt{1-x^2}$ এবং tangent $= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. (C. U. 1941 ; E. B. S. B. 1951)

11. একটি সূক্ষ্মকোণের tangent $=\frac{a}{b}$. দেখাও যে, উহার cosine $=\frac{\quad}{\sqrt{a^2+b^2}}$

এবং cosec $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\quad}$

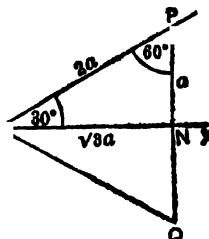
12. $5 \tan A=4$ হইলে, $\frac{5 \sin A-3 \cos A}{\sin A+2 \cos A}$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে A সূক্ষ্মকোণ। (S. F. 1960)

13. $\sin \theta=\frac{3}{5}$ হইলে $\frac{\sec \theta-\tan \theta}{\operatorname{cosec} \theta+\cot \theta}$ এর মান কত ?

14. $\sin A=\frac{3}{5}$ এবং $\cos B=\frac{12}{13}$ হইলে, $\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A \tan B}$ এর মান কত ? (S: F. 1958)

কতিপয় কোণের কোণানুপাত

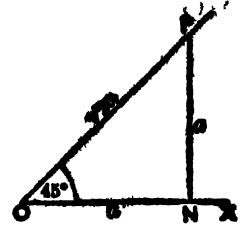
25. 30° কোণের কোণানুপাত।

মনে কর, OP সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া $\angle XOP=30^\circ$ উৎপন্ন করিয়াছে। ঘূর্ণ্যমান সরলরেখার যে কোন বিন্দু P হইতে OX এর উপর PN লম্ব টান। তাহা হইলে, $\angle OPN=60^\circ$ হইল। PN কে বর্ধিত কর এবং বর্ধিতাংশ হইতে PN এর সমান করিয়া QN লও। OQ যোগ কর। তাহা হইলে NOP এবং NOQ ত্রিভুজদ্বয়ের PN=QN, ON=ON এবং $\angle PNO=\angle QNO$ ($\because$ প্রত্যেকে সমকোণ); সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore \angle OQN=\angle OPN=60^\circ$; $\therefore$ POQ ত্রিভুজের তৃতীয় কোণ $POQ=60^\circ$; $\therefore$ POQ ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ $=60^\circ$. $\therefore$ POQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ। $\therefore$ OP=PQ=2PN. . PN $=a$ হইলে, OP $=2a$ এবং $ON=\sqrt{OP^2-PN^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=\sqrt{3}a$.

$$\therefore \sin 30^\circ=\frac{PN}{OP}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}, \cos 30^\circ=\frac{ON}{OP}=\frac{\sqrt{3}a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30^\circ=\frac{PN}{ON}=\frac{\quad}{\sqrt{3}a}=\frac{1}{\sqrt{3}}, \cot 30^\circ=\frac{ON}{PN}=\frac{\sqrt{3}a}{\quad}=\sqrt{3},$$

$$\sec 30^\circ=\frac{OP}{ON}=\frac{2a}{\sqrt{3}a}=\frac{2}{\sqrt{3}}, \operatorname{cosec} 30^\circ=\frac{OP}{PN}=\frac{2a}{a}=2.$$

26. [illegible]নুপাত।

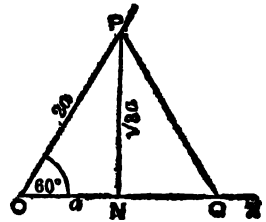
মনে কর, $\angle XOP = 45°$ এবং PN, OX এর উপর লম্ব। তাহা হইলে PON একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যাহার O কোণ 45° বলিয়া P কোণও 45°. এখন, $PN = a$ হইলে, $ON = a$ এবং $OP = \sqrt{PN^2 + ON^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$.

$$\sin 45° = \frac{PN}{OP} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 45° = \frac{ON}{OP} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan 45° = \frac{PN}{ON} = \frac{a}{a} = 1, \cot 45° = \frac{ON}{PN} = \frac{a}{a} = 1,$$

$$\sec 45° = \frac{OP}{ON} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}, \text{cosec } 45° = \frac{OP}{PN} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}.$$

27 60° কোণের কোণানুপাত।

মনে কর, $\angle XOP = 60°$ এবং PN, OX এর উপর লম্ব। NX হইতে ON এর সমান করিয়া NQ লও। PQ যোগ কর।

এখন, PNO এবং PNQ ত্রিভুজদ্বয়ের $ON = NQ$, $PN = PN$ এবং অন্তর্গত $\angle PNO =$ অন্তর্গত $\angle PNQ$ ($\because$ প্রত্যেকে সমকোণ), $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ $\angle PQN = \angle PON = 60°$, $\therefore$ POQ ত্রিভুজের তৃতীয় কোণ $OPQ = 60°$, $\therefore$ POQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ। তাহা হইলে, $ON = a$ হইলে, $OP = OQ = 2a$ এবং $PN = \sqrt{OP^2 - ON^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a$.

$$\therefore \sin 60° = \frac{PN}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60° = \frac{ON}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\tan 60° = \frac{PN}{ON} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}, \cot 60° = \frac{ON}{PN} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\sec 60° = \frac{OP}{ON} = \frac{2a}{a} = 2, \quad \text{cosec } 60° = \frac{OP}{PN} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

28. 90° কোণের কোণানুপাত।

মনে কর, XOP একটি সূক্ষ্মকোণ এবং PN, OX এর উপর লম্ব। এখন, $\angle XOP$ যতই 90° এর কাছাকাছি হইতে থাকিবে, PN ততই OPর নিকটবর্তী হইবে এবং ON

ততই ছোট হইবে। চরম অবস্থায় $\angle XOP$ যখন 90° হইবে, PN ও OP মিলিয়া এক হইয়া যাইবে বলিয়া, $PN=OP$ এবং $ON=0$ হইবে।

$$\sin 90^\circ = \frac{PN}{OP} \text{ এর চরম অবস্থা} = \frac{OP}{OP} = 1,$$

$$\cos 90^\circ = \frac{ON}{OP} \text{ এর চরম অবস্থা} = \frac{0}{OP} = 0,$$

$$\cot 90^\circ = \frac{ON}{PN} \text{ এর চরম অবস্থা} = \frac{0}{OP} = 0,$$

$$\text{cosec } 90^\circ = \frac{OP}{PN} \text{ এর চরম অবস্থা} = \frac{OP}{OP} = 1.$$

$\because$ $\tan 90^\circ = \frac{PN}{ON}$ এর চরম অবস্থা $= \frac{OP}{0}$ এবং $\sec 90^\circ = \frac{OP}{ON}$ এর চরম অবস্থা $= \frac{OP}{0}$; সুতরাং $\tan 90^\circ$ এবং $\sec 90^\circ$ এর নির্দিষ্ট সসীম মান হইবে না, উহাদের মান অসীম অর্থাৎ ∞ হইবে।

29. 0° কোণের কোণানুপাত।

মনে কর, XOP একটি সূক্ষ্মকোণ এবং PN, OX এর উপর লম্ব। এখন, $\angle XOP$ যতই 0°র কাছাকাছি হইতে থাকিবে, OP ততই ON এর নিকটবর্তী হইবে এবং PN ততই ছোট হইবে। চরম অবস্থায় $\angle XOP$ যখন 0° হইবে, OP ও ON মিলিয়া এক হইয়া যাইবে বলিয়া, $OP=ON$ এবং $PN=0$ হইবে।

$$\therefore \sin 0^\circ = \frac{PN}{OP} \text{ এর চরম অবস্থা} = \frac{0}{ON} = 0,$$

$$\cos 0^\circ = \frac{ON}{OP} \text{ এর চরম অবস্থা} = \frac{ON}{ON} = 1,$$

$$\tan 0^\circ = \frac{PN}{ON} \text{ এর চরম অবস্থা} = \frac{0}{ON} = 0,$$

$$\sec 0^\circ = \frac{OP}{ON} \text{ এর চরম অবস্থা} = \frac{ON}{ON} = 1,$$

$\because$ $\cot 0^\circ = \frac{ON}{PN}$ এর চরম অবস্থা $= \frac{ON}{0}$ এবং $\text{cosec } 0^\circ = \frac{OP}{PN}$ এর চরম অবস্থা $= \frac{ON}{0}$; সুতরাং $\cot 0^\circ$ এবং $\text{cosec } 0^\circ$ এর নির্দিষ্ট সসীম মান হইবে না, উহাদের মান অসীম অর্থাৎ ∞ হইবে।

30. 0°, 30°, 45°, 60° এবং 90° পরিমিত কোণের কোণানুপাতগুলির মান মনে রাখার প্রয়োজন হইবে। নিম্নে একটি তালিকা দেওয়া গেল :

কোণ	0°	30°	45°	60°	90°
সাইন	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
কস	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
ট্যান	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

টীকা। কোন কোণের সাইন = উহার পূরক কোণের কস (অনু. 18) ; সুতরাং সাইনের সারির মানগুলিকে বিপরীতক্রমে লইলে কোসাইনের সারি পাওয়া যায়। ভাগ দ্বারা সাইন ও কসের সারি হইতে ট্যানের সারি পাওয়া যায়। আবার ট্যান, কস ও সাইনের সারির অন্যোন্যক লইলে যথাক্রমে কট, সেক ও কোসেকের সারি পাওয়া যাইবে। সুতরাং, **সাইনের সারির মানগুলি মনে রাখিলেই অন্যান্য সারির মানগুলি বলা যায়।** সাইনের সারির মানগুলি মনে রাখিবার কৌশল এই : 0, 1, 2, 3 ও 4 এর প্রত্যেকটিকে 4 দিয়া ভাগ কর। ভাগফলগুলির বর্গমূল সাইনের মান হইবে। যেমন, $\sin 0° = \sqrt{\frac{0}{4}} = 0$, $\sin 30° = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\sin 60° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ও $\sin 90° = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$.

আবার, যেহেতু $\sin (180° - \theta) = \sin \theta$ এবং $\cos (180° - \theta) = -\cos \theta$ (অনু. 19) ; সুতরাং সাইনের ঐ মানগুলির সাহায্যে 120°, 135°, 150° এবং 180° পরিমিত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান বলা যাইতে পারে।

উদা. 1. সাংখ্যমান নির্ণয় কর :

$\cot^2 30° - 2 \cos^2 60° - \frac{3}{4} \sec^2 45° - 4 \sin^2 30°$. (S. F: 1952)

প্রদত্ত রাশি $= (\sqrt{3})^2 - 2(\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}(\sqrt{2})^2 - 4(\frac{1}{2})^2 = 3 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 0$.

উদা. 2. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1+2 \sin 60° \cos 60°}{\sin 60° + \cos 60°} + \frac{1-2 \sin 60° \cos 60°}{\sin 60° - \cos 60°} = 2 \cos 30°. \text{ (C. U. 1941)}$$

বাম পক্ষ $= \dfrac{1+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}} + \dfrac{1-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ (পদদ্বয়ের লব ও হরকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া)

$= \dfrac{2\sqrt{3}+3-2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2-3-\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3-1} = \sqrt{3}$

এবং ডান পক্ষ $= 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. প্রমাণিত হইল।

প্রশ্নমালা 7

1. মান নির্ণয় কর : $\cos 60^\circ$, $\sec 30^\circ$ এবং $\cot 60^\circ$. (C. U. 1947)

2. প্রমাণ কর :

 (i) $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$ এবং $\sin 90^\circ = 1$. (C. U. 1944)

 (ii) $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ এবং $\operatorname{cosec} 30^\circ = 2$. (C. U. 1943, '45)

 (iii) $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (G. U. 1951)

সাংখ্যমান নির্ণয় কর :

3. $4\sin^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ + \operatorname{cosec}^2 30^\circ$. (C. U. 1940)

4. $\tan^2\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \tan\frac{\pi}{6} \cdot \tan^2\frac{\pi}{3}$. (C. U. 1949)

5. $\sin^2 30^\circ + 4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ$. (C. U. 1950)

6. $\tan^2 30^\circ + 2\sin 60^\circ + \tan 45^\circ - \tan 60^\circ + \cos^2 30^\circ$. (G. U. 1948)

7. $3\tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2}\cot^2 30^\circ + \frac{1}{8}\sec^2 45^\circ$. (C. U. 1951)

8. $\frac{2\tan^2 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} + (\sec^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ) - (\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ)$. (G. U. 1950)

9. $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1+\tan 60^\circ \tan 30^\circ} + \cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$. (S. F. 1953)

10. $\frac{1-\sin^2 30^\circ}{1+\sin^2 45^\circ} \times \frac{\cos^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ}{\operatorname{cosec}^2 90^\circ - \cot^2 90^\circ} \div (\sin 60^\circ \tan 30^\circ)$. (G. U. 1954)

প্রমাণ কর :

11. $\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} = \sqrt{3}$. (C. U. 1940)

12. $\cos 60^\circ = 1 - 2\sin^2 30^\circ$. (E. B. S. B. 1949)

13. $\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}} = \sec 60^\circ + \tan 60^\circ$. (C. U. 1942)

14. $\frac{1+2\sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ} + \frac{1-2\sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ - \cos 60^\circ} = 2\cos 30^\circ$. (C. U. 1941)

31. অপনয়ন (Elimination)

উদা. 1. $x = a\sin\theta$ এবং $y\sec\theta = b$ সমীকরণদ্বয় হইতে θ অপনয়ন কর।

$\because x = a\sin\theta$, $\therefore \frac{x}{a} = \sin\theta$, $\because y\sec\theta = b$, $\therefore \frac{y}{b} = \frac{1}{\sec\theta} = \cos\theta$

$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

উদা. 2. যদি $x=a\sec\theta$ এবং $y=b\tan\theta$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad \text{(G. U. 1951)}$$

শর্ত হইতে, $\frac{x}{a}=\sec\theta$ এবং $\frac{y}{b}=\tan\theta$

$$\therefore \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=\sec^2\theta-\tan^2\theta=1 \quad \therefore \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

উদা. 3. যদি $\sin\theta+\cos\theta=p$ এবং $\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta=q$ হয়, তবে দেখাও যে, $q(p^2-1)=2p$.

$$q(p^2-1)=(\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta)\{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1\}$$
$$=\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\right)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-1)$$
$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\times 2\sin\theta\cos\theta=2(\sin\theta+\cos\theta)=2p.$$

উদা. 4. যদি $x\sin^3\alpha+y\cos^3\alpha=\sin\alpha\cos\alpha\cdots(1)$ এবং $x\sin\alpha-y\cos\alpha=0\cdots(2)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=1$. (C. U. '37)

(2) হইতে, $x\sin\alpha=y\cos\alpha$; (1)এ $y\cos\alpha$ এর জন্য $x\sin\alpha$ বসাইয়া,

$$x\sin^3\alpha+x\sin\alpha.\cos^2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha,$$

বা $x\sin\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha$

$\therefore x\sin\alpha=\sin\alpha\cos\alpha \quad \therefore x=\cos\alpha.$

অনুরূপে, (1)এ $x\sin\alpha$ এর জন্য $y\cos\alpha$ বসাইয়া,

$$y\cos\alpha.\sin^2\alpha+y\cos^3\alpha=\sin\alpha\cos\alpha,$$

বা $y\cos\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha$

$\therefore y\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha \quad \therefore y=\sin\alpha$

$\therefore x^2+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$

প্রশ্নমালা 8

সমীকরণগুলি হইতে θ অপনয়ন কর :

1. $x=a\sin\theta,\ y=b\operatorname{cosec}\theta.$
2. $x=m\cos\theta,\ y=n\sec\theta.$
3. $x=a\sin\theta,\ y=b\cos\theta.$
4. $x=a\operatorname{cosec}\theta,\ y=b\cot\theta.$
5. $x=a\sec\theta,\ y=b\tan\theta.$
6. যদি $x=a(\sec\theta+\tan\theta)$ এবং $y=b(\sec\theta-\tan\theta)$ হয়, তবে দেখাও যে, $$xy=ab.$$
7. যদি $x=a(\sin\theta+\cos\theta)$ এবং $y=b(\sin\theta-\cos\theta)$ হয়, তবে দেখাও যে, $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2.$$

8. যদি $\sin\theta - \cos\theta = a$ এবং $\sec\theta - \operatorname{cosec}\theta = b$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$$b(a^2-1) = -2a.$$

32. সমীকরণ সমাধান।

উদা. 1. $2\sin\theta = \operatorname{cosec}\theta$এর সমীকরণ সমাধান কর, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।

$$2\sin\theta = \operatorname{cosec}\theta, \text{ বা } 2\sin\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \text{ বা } \sin^2\theta = \tfrac{1}{2}$$

$\therefore\ \sin\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ কিন্তু θ সূক্ষ্মকোণ বলিয়া, $\sin\theta$এর মান ঋণাত্মক হইতে পারে না। $\therefore\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\quad \therefore\ \theta = 45^\circ.$

উদা. 2. সমীকরণ সমাধান কর : $\tan 7A = \cot 3A$.

কোন কোণের $\cot$ = উহার পূরক কোণের $\tan$ (অনু. 18) ;

$\therefore$ সমীকরণটি হইতে $\tan 7A = \cot 3A = \tan(90^\circ - 3A)$;

$\therefore\ 7A = 90^\circ - 3A$, বা $10A = 90^\circ\ \therefore\ A = 9^\circ.$

উদা. 3. $2\sin^2\theta = 3\cos\theta$ এর সমীকরণ সমাধান কর, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।

$2\sin^2\theta = 3\cos\theta$, বা $2(1-\cos^2\theta) = 3\cos\theta$,

বা $2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$, বা $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 2) = 0$

$\therefore\ \cos\theta = \frac{1}{2}$ বা -2 ; কিন্তু $\cos\theta$ এর মান -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না (অনু. 22) ; $\therefore\ \cos\theta = \frac{1}{2}\quad \therefore\ \theta = 60^\circ.$

উদা. 4. $1+\sin^2 A = 3\sin A\cos A$ হইলে, $\tan A$ নির্ণয় কর এবং ইহা হইতে দেখাও যে, $\sin A$র একটি মান $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, যেখানে A সূক্ষ্মকোণ। (C. U. 1950)

সমীকরণটি হইতে, $\sin^2 A + \cos^2 A + \sin^2 A = 3\sin A\cos A$,

বা $2\sin^2 A - 3\sin A\cos A + \cos^2 A = 0$,

বা $2\tan^2 A - 3\tan A + 1 = 0$, বা $(\tan A - 1)(2\tan A - 1) = 0$

$\therefore\ \tan A = 1$ বা $\frac{1}{2}$

$\therefore\ \tan A = 1$ হইতে, $A = 45^\circ$; $\therefore\ \sin A = \sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

উদা. 5. যদি (1) $r\cos\theta = 2\sqrt{3}$, এবং (2) $r\sin\theta = 2$ এবং θ সূক্ষ্মকোণ হয়, তবে r ও θ এর মান নির্ণয় কর। (C. U. 1945)

(1) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া, $\cot\theta = \sqrt{3}\quad \therefore\ \theta = 30^\circ$

(1) হইতে, $r\cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$, বা $r\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\quad \therefore\ r = 4.$

প্রশ্নমালা 9

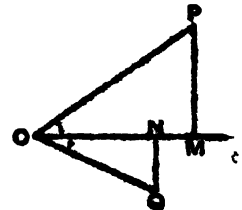
সমীকরণ সমাধান কর, যেখানে θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ :

1. $\sin\theta = \operatorname{cosec}\theta$.
2. $2\cos\theta = \sec\theta$.
3. $\tan\theta - 3\cot\theta = 0$.
4. $4\sin\theta - 3\operatorname{cosec}\theta = 0$.
5. $\sin\theta + \cos\theta = 1$.
6. $\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{2}$.
7. $\sin 2\theta = \cos 3\theta$.
8. $\tan 5\theta - \cot 4\theta = 0$.
9. $2\cos^2\theta = 3\sin\theta$.
10. $3\operatorname{cosec}^2\theta - 2\sec\theta = 0$.
11. $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 3$. (Pat. U. 1950)
12. $r\sin\theta = 1, r\cos\theta = \sqrt{3}$.
13. $x\tan\theta = 3\sqrt{3}, x\cot\theta = \sqrt{3}$.
14. $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$ হইলে দেখাও যে, $\cot\theta = \sqrt{3}$. (C. U. 1951)
15. $\tan^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = x\sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ$ হইলে, x এর মান নির্ণয় কর। (C. U. 1949)
16. $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ হইলে, $\tan\theta$ এবং θ এর মান নির্ণয় কর।
17. $\tan\theta + \cot\theta = 2$ হইলে $\sin\theta$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ। (S. F. 1955)
18. $\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha = 2$ হইলে দেখাও যে, $\sin^7\alpha + \operatorname{cosec}^7\alpha = 2$, যেখানে সূক্ষ্মকোণ। (S. F. 1960)

[প্রথম সমীকরণ হইতে $\sin\alpha = 1$, এই মান ২য় সমীকরণে বসাও।]

33. ত্রিকোণমিতির সাহায্যে কোন বস্তুর দূরত্ব ও উচ্চতা বা দুইটি বিন্দুর ব্যবধান না মাপিয়া নির্ণয় করা যায়। ইহারই সাহায্যে চন্দ্র, সূর্য প্রভৃতির দূরত্ব ও ব্যাস নির্ণয় করা হইয়াছে।

34 ভূমিতলের সহিত সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত বা কল্পিত সরলরেখাকে **অনুভূমিক রেখা** (Horizontal line) বলে এবং ভূমিতলের উপর লম্বভাবে অঙ্কিত বা কল্পিত সরলরেখাকে **উল্লম্ব রেখা** (Vertical line) বলে।

35. **উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ।** মনে কর, O এবং P দুইটি বিন্দু এবং O র উপর দিকে P অবস্থিত। উলম্ব রেখা PM যেন অনুভূমিক রেখা OM কে M বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে O বিন্দুতে চক্ষু রাখিয়া P র দিকে দৃষ্টিপাত করিলে OP দৃষ্টিরেখা O বিন্দুতে OM এর সহিত যে MOP কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে O বিন্দুতে P বিন্দুর **উন্নতি কোণ** (Angle of elevation) বলে।

অনুরূপে, O র নীচের দিকে অবস্থিত Q বিন্দু হইতে অঙ্কিত QN উলম্ব রেখা যদি OM অনুভূমিক রেখাকে N বিন্দুতে ছেদ করে, তবে QON কোণকে O বিন্দুতে Q বিন্দুর **অবনতি কোণ** (Angle of depression) বলে।

উদা. 1. কোন চিমনি হইতে 50 মিটার দূরে অবস্থিত কোন স্থানে উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ 60°. চিমনিটির উচ্চতা কত ? (C. U. 1927)

উল্লম্ব রেখা PM যেন চিমনির উচ্চতা এবং উহার পাদদেশ M দিয়া অঙ্কিত অনুভূমিক রেখা OM যেন 50 মিটার। তাহা হইলে O বিন্দুতে P বিন্দুর উন্নতি কোণ 60° এবং $\angle PMO = 90^\circ$.

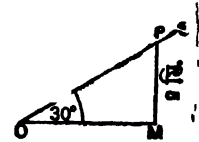
এখন, $\frac{PM}{OM} = \tan 60^\circ$, বা $\frac{PM}{50 \text{ মি.}} = \sqrt{3}$

$\therefore$ PM বা চিমনির উচ্চতা $= 50\sqrt{3}$ মি. বা $50 \times 1{\cdot}73205 \cdots$ মি.

$= 86{\cdot}60 \cdots$ মি.

উদা. 2. অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত একটি উল্লম্ব যষ্টির উচ্চতা 2 মিটার। যখন সূর্যের উন্নতি কোণ 30°, তখন ঐ সমতলে যষ্টিটির ছায়ার দৈর্ঘ্য কত ?

S যেন সূর্য, PM যেন 2 মিটার উচ্চ উল্লম্ব যষ্টি এবং OM যেন অনুভূমিক সমতলে PM এর ছায়া। তাহা হইলে, O বিন্দুতে P বিন্দুর উন্নতি কোণ 30° এবং $\angle PMO = 90^\circ$.

এখন, $\frac{PM}{OM} = \tan 30^\circ$, বা $\frac{2}{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ OM বা ছায়ার দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{3}$ মি. বা $2 \times 1{\cdot}7320 \cdots$ মি. $= 3{\cdot}46 \cdots$ মি.

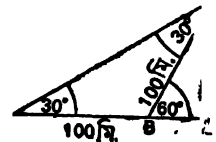
উদা. 3. একটি উল্লম্ব চিমনি উহার পাদদেশগামী অনুভূমিক সরলরেখার A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 30° ও 60° কোণ উৎপন্ন করে। AB যদি 100 মিটার হয়, তবে চিমনির উচ্চতা কত ? (C. U. 1940)

$\angle APB =$ বহিঃ $\angle PBM -$ অন্তঃ $\angle PAB$

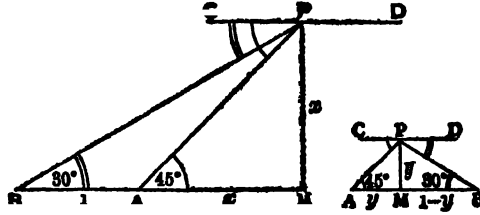
$= 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$,

$\therefore$ PB = AB = 100 মিটার

$\therefore$ PBM সমকোণী ত্রিভুজ হইতে,

$\frac{PM}{PB} = \sin 60^\circ$, বা $\frac{PM}{100 \text{ মি.}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

PM বা চিমনির উচ্চতা $= 50\sqrt{3}$ মিটার বা $86{\cdot}60 \cdots$ মিটার।

উদা. 4. কোন সোজা রাস্তার উপর উল্লম্বভাবে অবস্থিত একটি এরোপ্লেন হইতে ঐ রাস্তার উপর পর পর দুইটি মাইল-পোষ্টের অবনতি কোণ 45° ও 30° দেখা গেল। রাস্তা হইতে এরোপ্লেনটির উচ্চতা কত ? (C. U. 1941 ; G. U. 1949)

P যেন এরোপ্লেন, অনুভূমিক রেখা AB যেন রাস্তা এবং উহার উপর পর পর

প্রথম চিত্র দ্বিতীয় চিত্র

স্থিত A ও B যেন দুইটি মাইল-পোষ্ট, ABর উপর উল্লম্ব রেখা PM যেন এরোপ্লেনের চ্চতা। ABর সমান্তরাল CPD একটি অনুভূমিক রেখা।

. CD ∥ AB, ∴ ∠PAM = ∠APC = 45° এবং ∠PBM = ∠BPC = 30° বং AB = 1 মাইল।

. **প্রথম চিত্রে**, মনে কর PM = x মাইল। তাহা হইলে, AM = x মাইল এবং M = BA + AM = $(1+x)$ মাইল ; $\therefore \frac{PM}{BM} = \tan 30°$ বা $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

বা $x\sqrt{3} = 1 + x$, বা $x(\sqrt{3}-1) = 1$. ∴ $x = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$ মাইল

$= \frac{\sqrt{3}+1}{3-1}$ মাইল $= \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ মাইল বা 1·37 মাইল (আসন্ন)।

. **দ্বিতীয় চিত্রে**, মনে কর PM = y মাইল। তাহা হইলে, AM = y মাইল এবং I = BA − AM = $(1-y)$ মাইল ; $\therefore \frac{PM}{BM} = \tan 30°$, বা $\frac{y}{1-y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

বা $y\sqrt{3} = 1 - y$, বা $y(\sqrt{3}+1) = 1$.

$y = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$ মা. $= \frac{\sqrt{3}-1}{3-1}$ মা. $= \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ মা. = ·37 মাইল (আসন্ন)

∴ এরোপ্লেনের উচ্চতা = আসন্ন 1·37 মাইল বা ·37 মাইল।

উদা. 5. 15 ফুট উচ্চ একটি উল্লম্ব খুঁটি কোন এক উচ্চতায় ভাঙ্গিয়া গেল এবং র উপরের অংশ খুঁটিটি হইতে সম্পূর্ণরূপে বিচ্ছিন্ন না হইয়া ভূমির সহিত 30° ণে মিলিত হইল। খুঁটিটি কত উপরে ভাঙ্গিয়াছিল? (G. U. 1951)

MP যেন খুঁটি এবং উহা Q বিন্দুতে ভাঙ্গিয়া যাওয়ায় P বিন্দুটি ভূমির সহিত বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

মনে কর, MQ = x ফুট। তাহা হইলে,

AQ = PQ = PM − QM = $(15-x)$ ফুট

এখন, AM অনুভূমিক রেখা এবং MP উল্লম্ব রেখা তাহা লে, AMQ ত্রিভুজের M সমকোণ।

$\therefore \frac{MQ}{AQ} = \sin 30°$, বা $\frac{x}{15-x} = \frac{1}{2}$,

বা $2x = 15 - x$, বা $3x = 15$ ∴ $x = 5$.

∴ খুঁটিটি 5 ফুট উপরে ভাঙ্গিয়াছে।

উদা. 6. 300 মিটার উচ্চ একটি পাহাড়ের চূড়া হইতে কোন স্তম্ভের শীর্ষ ও পাদদেশের অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° দেখা গেল। স্তম্ভটির উচ্চতা কত ?

মনে কর, উল্লম্ব PM পাহাড়ের P চূড়া এবং উল্লম্ব AB স্তম্ভের A শীর্ষ এবং B পাদদেশ। ভূমিতলে MB একটি অনুভূমিক রেখা। মনে কর, MB-র সমান্তরাল PC আর একটি অনুভূমিক রেখা। বর্ধিত BA যেন PC কে C বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। MPCB একটি আয়ত, কারণ উহার বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল এবং যে কোন কোণ সমকোণ ;

$\because$ CB = PM = 300 মি.। $\therefore$ AB = x মি. ধরিলে, AC = $(300 - x)$ মি.।

এখন, $\frac{PC}{CB} = \cot 60°$, বা $\frac{PC}{300 \text{ মি.}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\therefore$ PC $= \frac{300}{\sqrt{3}}$ মি. $= 100\sqrt{3}$ মি. ;

$\therefore$ $\frac{AC}{PC} = \tan 30°$, বা $\frac{300 - x}{100\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, বা $\frac{300 - x}{100} = 1$,

$\therefore$ $x = 200$ $\therefore$ x অর্থাৎ স্তম্ভটির উচ্চতা = 200 মিটার।

প্রশ্নমালা 10

1. কোন চিমনির পাদদেশ হইতে 50 মিটার দূরে অবস্থিত কোন স্থানে উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ 60°. চিমনিটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

2. একটি স্তম্ভ 100 মি. দূরে 30° সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিলে উহার উচ্চতা কত ?

3. 8 মিটার লম্বা একটি মই দেওয়ালের উপরিভাগে পৌঁছিয়াছে এবং উহা ভূমির সহিত 60° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। দেওয়ালের উচ্চতা নির্ণয় কর।

4. কোন নদীর এক তীরে অবস্থিত একটি বৃক্ষের উচ্চতা 20 মিটার। অপর তীরে অবস্থিত নিকটতম বিন্দুতে বৃক্ষটির উন্নতি কোণ 30°. নদীটির প্রস্থ কত ?

5. যখন একটি খুঁটির উচ্চতা এবং উহার ছায়ার দৈর্ঘ্য $1 : \sqrt{3}$ এর অনুপাতে থাকে, তখন সূর্যের উন্নতি কোণ কত ?

6. যখন 9 মিটার উচ্চ একটি খুঁটির ছায়ার দৈর্ঘ্য $3\sqrt{3}$ মিটার, তখন সূর্যের উন্নতি কোণ কত ?

7. অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত দুইটি স্তম্ভের ব্যবধান 25 মিটার। 40 মিটার উচ্চ প্রথমটির চূড়া হইতে দ্বিতীয়টির চূড়ার উন্নতি কোণ 60° দেখা গেল। দ্বিতীয় স্তম্ভটির উচ্চতা কত ?

8. 60 মিটার উচ্চ একটি টাওয়ারের চূড়ায় একটি উল্লম্ব খুঁটি অবস্থিত। কোন বিন্দুতে ঐ টাওয়ার ও খুঁটির শীর্ষদ্বয়ের উন্নতি কোণ যথাক্রমে 45° এবং 60°। খুঁটির দৈর্ঘ্য এবং টাওয়ার হইতে বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

9. 30 মিটার উচ্চ একটি উল্লম্ব খুঁটি কোন এক উচ্চতায় ভাঙ্গিয়া গেল এবং উহার অবিচ্ছিন্ন উপরের অংশ ভূমির সহিত 30° কোণে মিলিত হইল। খুঁটিটি কত উপরে ভাঙ্গিয়াছিল? (C. U. 1950)

10. একটি খাড়া দণ্ড কোন এক উচ্চতায় ভাঙ্গিয়া গেল এবং উহার উপরের অংশ খুটি হইতে সম্পূর্ণরূপে বিচ্ছিন্ন না হইয়া দণ্ডটির তলদেশ হইতে 5 মিটার দূরে ভূমির সহিত 30° কোণ উৎপন্ন করিল। দণ্ডটি প্রথমে কত উচ্চ ছিল?

11. একটি সোজা গাছ ঝড়ে ভাঙ্গিয়া গেল এবং উহার উপরের অংশ গাছটি হইতে সম্পূর্ণরূপে বিচ্ছিন্ন না হইয়া গাছটির মূল হইতে 10 মিটার দূরে ভূমির সহিত 30° কোণ উৎপন্ন করিল। গাছটির উচ্চতা কত ছিল?

12. একটি স্তম্ভের পাদদেশগামী অনুভূমিক সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত A ও B বিন্দুতে স্তম্ভটির শীর্ষের উন্নতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60°. যদি AB=150 মিটার হয়, তবে স্তম্ভটির উচ্চতা কত?

13. একটি সোজা নদীর এক তীরে A ও B দুইটি বিন্দু এবং অপর তীরে C আর একটি বিন্দু। AC যদি AB ও BC-র সহিত যথাক্রমে 30° ও 60° কোণ উৎপন্ন করে এবং AB=200 মিটার হয়, তবে নদীটির প্রস্থ কত?

14. সূর্যের উন্নতি কোণ 30° হইতে পরিবর্তিত হইয়া 60° হইলে একটি চিমনির ছায়ার দৈর্ঘ্য 50 মিটার কমিয়া যাইতে দেখা গেল। চিমনিটির উচ্চতা কত?

15. সূর্যের উন্নতি কোণ 60° হইলে সমতলে অবস্থিত একটি টাওয়ারের ছায়ার দৈর্ঘ্য যত, উন্নতি কোণ 45° হইলে, ছায়ার দৈর্ঘ্য তাহা অপেক্ষা 20 মিটার অধিক। টাওয়ারটির উচ্চতা কত?

16. সূর্যের উন্নতি কোণ 45° হইলে কোন সমতলে অবস্থিত একটি টাওয়ারের ছায়ার দৈর্ঘ্য যত, উন্নতি কোণ 30° হইলে ছায়ার দৈর্ঘ্য তাহা অপেক্ষা 60 মিটার অধিক। টাওয়ারটির উচ্চতা কত? (S. F. 1952)

17. একটি চিমনির পাদদেশগামী অনুভূমিক সরলরেখা বরাবর চিমনিটির দিকে 50 মিটার অগ্রসর হওয়ায় উহার উন্নতি কোণ 30° হইতে পরিবর্তিত হইয়া 45° হইল। চিমনির উচ্চতা কত? (C. U. 1951)

18. একটি টাওয়ারের দিকে 62 মিটার অগ্রসর হওয়ায় উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ 45° হইতে পরিবর্তিত হইয়া 60° হইল। টাওয়ারের উচ্চতা কত?

19. 80 মিটার উচ্চ একটি টাওয়ারের পাদদেশগামী অনুভূমিক সরলরেখার A ও B বিন্দুতে টাওয়ারটির শীর্ষের উন্নতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60°. A ও B যদি টাওয়ারটির একই পার্শ্বে থাকে, তবে AB নির্ণয় কর।

20. একই উচ্চতাবিশিষ্ট দুইটি স্তম্ভ 100 মিটার চওড়া একটি রাস্তার দুই পার্শ্বে অবস্থিত। স্তম্ভদ্বয়ের সহিত একই সরলরেখায় অবস্থিত রাস্তাটির একটি বিন্দুতে উহাদের শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° ও 60°. স্তম্ভদ্বয়ের উচ্চতা এবং বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় কর।

21. 24 মিটার ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি উল্লম্ব দণ্ডের একটির উচ্চতা অপরটির দ্বিগুণ। উহাদের পাদদেশদ্বয় সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দু হইতে দেখা গেল উহাদের চূড়ার উন্নতি কোণদ্বয় পরস্পরের অনুপূরক। দণ্ডদ্বয়ের উচ্চতা কত?

22. এক ব্যক্তি কোন নদীর এক তীরে দাঁড়াইয়া দেখিল যে, ঠিক বিপরীত তীরে অবস্থিত একটি স্তম্ভ 60° সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে। তীর হইতে স্তম্ভটির সহিত একই সরলরেখায় 50 মিটার পিছনে গিয়া দেখিল যে, স্তম্ভটি 45° সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে। স্তম্ভের উচ্চতা এবং নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

23. এক ব্যক্তি কোন নদীর এক তীরে দাঁড়াইয়া দেখিল যে, ঠিক বিপরীত তীরে অবস্থিত একটি টাওয়ার 60° সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে। তীর হইতে টাওয়ারটির সহিত একই সরলরেখায় 60 মিটার পিছনে গিয়া দেখিল যে, টাওয়ারটি 30° সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে। টাওয়ারটির উচ্চতা এবং নদীর বিস্তার কত?

24. কোন সোজা রাস্তার উপর উল্লম্বভাবে অবস্থিত একটি এরোপ্লেন হইতে ঐ রাস্তার উপর পর পর দুইটি কিলোমিটার-পোষ্টের অবনতি কোণ 30° ও 60° দেখা গেল। রাস্তা হইতে এরোপ্লেনের উচ্চতা কত?

25. সমুদ্রপৃষ্ঠ হইতে 2400 মিটার উপরে অবস্থিত একটি বেলুন হইতে দুইটি জাহাজের অবনতি কোণ 30° ও 45° দেখা গেল। জাহাজ দুইটির একটি বেলুনটির পূর্বদিকে এবং অপরটি দক্ষিণদিকে অবস্থিত থাকিলে, উহাদের ব্যবধান কত?

26. 15 মিটার উচ্চ একটি খুঁটির শীর্ষ হইতে একটি স্মৃতিস্তম্ভের চূড়া ও পাদদেশের উন্নতি ও অবনতি কোণদ্বয় যথাক্রমে 30° ও 60° দেখা গেল। স্মৃতিস্তম্ভের উচ্চতা কত?

27. 200 মিটার উচ্চ একটি পাহাড় হইতে একটি গম্বুজের শীর্ষদেশ ও পাদদেশের অবনতি কোণ যথাক্রমে 45° ও 60° দেখা গেল। গম্বুজটির উচ্চতা কত?

28. একটি স্তম্ভের চূড়া হইতে অনুভূমিক ভূমির উপর অবস্থিত একটি বস্তুর অবনতি কোণ 45° দেখা গেল। চূড়া হইতে 15 মিটার নিম্নে অবস্থিত একটি বিন্দুতে বস্তুটির অবনতি কোণ 30° দেখা গেল। স্তম্ভের উচ্চতা কত?

29. একটি পাহাড়ের পাদদেশে উহার চূড়ার উন্নতিকোণ 45° দেখা গেল। অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণে নত ঢালু পথে পাহাড়টির চূড়ার দিকে এক কিলোমিটার অগ্রসর হওয়ায় উহার চূড়ার উন্নতি কোণ 60° দেখা গেল। পাহাড়টির উচ্চতা কত

30. এক ব্যক্তি পাহাড়ের চূড়া হইতে একটি নৌকাকে 30° অবনতি কোণে দেখিতে পাইল। উহা তাহার ঠিক নীচ বরাবর তীরের দিকে আসিতেছিল। তিন মিনিট পরে নৌকাটির অবনতি কোণ 60° দেখা গেল। নৌকার গতিবেগ একই থাকিলে উহা কত সময়ে তীরে পৌঁছিবে? (H. S. 1964